正標数のベクトル場に関するノート

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)

2024 年 04 月 30 日

目次

1 はじめに

本稿では標数 p の代数多様体上のベクトル場，とくに p-closed なもの，なかでも乗法型または加法型な（したがって群スキーム μ_p または α_p の作用と対応する）ものおよびその商について，私の研究成果も交えて説明する．

ベクトル場≒導分を考える理由はいくつかある．

- まず，ベクトル場は "無限小自己同型" とみなすことができる：自己同型群を一般化した自己同型群スキームの Lie 環（原点での接空間）がベクトル場全体の集合と自然に対応する（5.5 節）．標数 0 ではこれは被約だが，正標数では被約とは限らず，通常の自己同型に由来しないベクトル場が存在しうる．
  被約でない有限群スキームの代表的な例として μ_p や α_p があり，これらの作用は所定の性質を満たすベクトル場と対応する（命題 5.23）．
- 正標数特有の現象の代表的なものは純非分離拡大である．代数多様体のベクトル場による商を考えることができるが，導分は Leibniz 則を満たすことから，X の商 X^D は必ず X と $X^{(p)}$ の中間に位置する．その中で p 次の純非分離拡大は p-closed なベクトル場と対応する（系 2.15）．
- 標数が $p > 0$ のとき，導分に対しその p 回合成も導分になる．この演算と通常の括弧積によりベクトル場全体は restricted Lie algebra という構造をもち，その性質が他の正標数特有の現象と関係することがある．例えばアーベル多様体の p-rank を判定できる（例 4.10）．

なお，本稿の予備知識としては，「余談」と書かれた箇所を除き，【Hartshorne の Algebraic Geometry に登場する概念の多くに聞き覚えがある】ぐらいを想定している[*1]．代数幾何の専門家向けの研究紹介としては，「Derivations on K3 surfaces in positive characteristic」と題した 2019 年日本数学会秋季総合分科会講演[*2]や 2020 年代数学シンポジウム講演[*3]がある．

謝辞　伊藤浩行氏，難波友哉氏に改善意見をいただきました．感謝申し上げます．

[*1] 想定に実態が合っているかは読者の判断に委ねます．
[*2] `http://yuyamatsumoto.com/k3kanazawa.pdf`
[*3] `http://yuyamatsumoto.com/k3chiba.pdf`

2　ベクトル場・導分とそれによる商

2.1　ベクトル場・導分

k を環，R を k 代数，M を R 加群とする．R から M への k 上の**導分** (*derivation*) とは，k 加群としての準同型 $D\colon R \to M$ であって，Leibniz 則 $D(rs) = sD(r) + rD(s)$ を満たすものである．このとき D の k（の像）への制限は 0 になる．R から M への k 上の導分全体を $\mathrm{Der}_k(R, M)$ で表す．$\mathrm{Der}_k(R) := \mathrm{Der}_k(R, R)$ とする．

命題 2.1. R 加群 $\Omega^1_{R/k}$ および導分 $d\colon R \to \Omega^1_{R/k}$ が存在し次の普遍性を満たす：任意の R 加群 M に対し，

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega^1_{R/k}, M) \to \mathrm{Der}_k(R, M)\colon f \mapsto f \circ d$$

が全単射である．　$\Diamond$

本小節を通して，証明は適当な教科書を見よ．

以下，主に R から R への k 上の導分を考えるので，これを単に導分とよぶ．また $\Omega^1_{R/k}$ をしばしば単に Ω^1_R と書く．

自然数 i に対し，$\Omega^i_R := \bigwedge^i \Omega^1_R$ と定める（R 加群としての外積）．

$S \subset R$ による局所化 $S^{-1}R$ に対し，$\Omega^1_{S^{-1}R}$ と $S^{-1}R \otimes_R \Omega^1_R$ は自然に同型になる（商の微分：$d(\frac{r}{s}) = \frac{sdr - rds}{s^2}$）ことから，張り合わせにより k スキーム X に対する準連接層 Ω^1_X（正確には $\Omega^1_{X/k}$）が定まる．これを（1 次）微分形式の層とよぶ．$\Omega^i_X := \bigwedge^i \Omega^1_X$ と書き i 次微分形式の層とよぶ．また，Ω^1_X の双対 $(\Omega^1_X)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ を T_X や Θ_X（これも正確には $T_{X/k}$ や $\Theta_{X/k}$）と書き，接層などとよぶ．Θ_X の切断を**ベクトル場** (*vector field*) とよぶ．

これ以降 k は体とする．X が滑らかな n 次元代数多様体ならば，Ω^1_X や Θ_X は階数 n の局所自由層であり，$x_1, \ldots, x_n$ が閉点 $P \in X$ での局所座標のとき P の近傍での Ω^1_X の基底として $dx_1, \ldots, dx_n$ がとれ，Θ_X の双対基底を $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ と書く．Ω^i_X は $dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_i}$（$j_1 < \cdots < j_i$）を基底とする階数 $\binom{n}{i}$ の局所自由層である．とくに Ω^n_X は可逆層であり，対応する因子（線形同値を除いて一意に定まる）（またはその線形同値類）を K_X と書き X の**標準因子** (*canonical divisor*) とよぶ．

X が滑らかでなくても正規ならば，X^{sm} の標準因子に対応する X の Weil 因子を X の標準因子とよぶ．

X が整スキームだとする．$\mathrm{Der}(k(X))$ の元のことを**有理ベクトル場** (*rational vector field*) とよぶ．（有理ベクトル場との区別を強調する場合にはベクトル場を正則ベクトル場とよぶ．）X が k 上有限型で $U \subset X$ がアフィン開部分スキームならば，有理ベクトル場は $f \cdot D$，D は U 上のベクトル場，f は有理関数，の形に書ける．なお，整スキーム X 上のベクトル場は自然に有理ベクトル場とみなせる（前述した局所化との整合性）．

0 でない有理関数 f を用いて $D_1 = f \cdot D_2$ と書けるとき D_1, D_2 は同値であるという．

D_1, D_2 が導分のとき，括弧積 $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ も導分になる（証明は容易）．なお，$D_1 \circ D_2$ などはほとんどの場合導分でない．

D が $\boldsymbol{F}_p$ 代数の導分のとき，その p 回合成 $D^p = D \circ \cdots \circ D$ も導分になる（略証：Leibniz 則を示すため $D^p(rs)$ を計算すると，邪魔な項はすべて二項係数が p の倍数になり消える）．なお D_1 と D_2 が可換（$[D_1, D_2] = 0$）とは限らないので，$(D_1 + D_2)^p$ と $D_1^p + D_2^p$ は一般に一致しない．

2.2 p-closed なベクトル場

本稿ではこれ以降，k は標数 $p > 0$ の代数閉体とし，X や Y は k 上の代数多様体とする．

なお代数体 k 上の代数多様体の定義は，有限型で分離で整とする．（しばらくは標数 p の一般の体でも十分かもしれない．）

定義 2.2. X を整スキームとし，D を X 上のベクトル場とする．ある $h \in k(X)$ に対し $D^p = hD$ となるとき，D は *p-closed* であるという．

$h = 1$ のとき D は**乗法型** (*of multiplicative type*) であるといい，$h = 0$ のとき D は**加法型** (*of additive type*) であるという．

有理ベクトル場についても同様に定義する． ♢

注 2.3. D が p-closed で h が上の通りであるとき，$D(h) = 0$ が成り立つ．実際，$D \circ D^p = D(hD(-)) = D(h)D(-) + hD(D(-))$ と $D^p \circ D = hD(D(-))$ が等しいので，$D(h)D(-) = 0$ であり，とくに $D(h)^2 = 0$ である． ♢

注 2.4. h のとりうる範囲を $k(X)$ にするか $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ にするかは微妙なところで，一般には同値にならない．X が Noether かつ正規（で整）ならば同値である（[Mat22b, Proposition 2.5]，仮定を外したときの反例は [Mat22b, Example 2.8]）． ♢

命題 2.5 (Hochschild の公式，[松村 80, 定理 25.5])**.** ベクトル場 D と $a \in \mathcal{O}_X$ に対し，$(aD)^p = a^pD^p + (aD)^{p-1}(a) \cdot D$ が成り立つ． ♢

系 2.6. p-closed なベクトル場の有理関数倍もまた p-closed である． ♢

証明. $D^p = hD$ ならば，$h' = a^{p-1}h + D((aD)^{p-2}(a))$ とおくとき Hochschild の公式より $(aD)^p = h' \cdot aD$ である． □

ただ，具体的に h' を計算しようというときには命題 2.5 を使ってもあまり易しくならない（$(aD)^{p-1}(a)$ という項があるので，直接 $(aD)^p$ を計算する労力とあまり変わらない）ので，私は実質的に系 2.6 の方しか使っていない気がする．つまり，D' が p-closed であることが分かっているならば，1 つの元 r（ただし $D'(r) \neq 0$）に対して $h' := \frac{D'^p(r)}{D'(r)}$ を計算すればこの h' に対して $D'^p = h'D'$ であることが従う．

2.3 foliation

本稿ではあまり使わないが，せっかくなので導入しておく．

定義 2.7. Θ_X の部分 $\mathcal{O}_X$ 加群 F で次を満たすものを *foliation* という[*4][*5]．

- $[F, F] := \{[D_1, D_2] \mid D_1, D_2 \in F\} \subset F$.
- $F^p := \{D^p \mid D \in F\} \subset F$.
- Θ_X/F は torsion-free.（このことを，F は *saturated* な部分 $\mathcal{O}_X$ 加群であるという．） ♢

[*4] 微分幾何の文脈では「葉層構造」と訳される．代数幾何でも同様によんでいいかもしれない．

[*5] $[F, F]$ と F^p はこの部分集合が生成する部分 $\mathcal{O}_X$ 加群と定義するべきかもしれないが，条件は同値になるので深く考えていない．

滑らかでない場合にこの定義が適切なのか詳しくないが，とりあえずこう定義しておく．

X が滑らかならば，余次元 2 以上の閉部分スキームの補集合上では F と Θ_X/F は局所自由層になる．F の階数をこれで定義する．

例 2.8. $D \in H^0(X, \Theta_X)$ を p-closed なベクトル場とする．（以下に現れる因子 (D) および閉部分スキーム $\langle D \rangle$ については 3.1 節を参照してください．）F' を D が生成する Θ_X の部分 $\mathcal{O}_X$ 加群とすると，saturated 以外の条件は満たすが，$(D) \neq 0$ ならば saturated でない．F' の saturation，すなわち F' を含む最小の saturated 部分 $\mathcal{O}_X$ 加群（構成は，$\mathrm{Ker}(\Theta_X \to \Theta_X/F \to (\Theta_X/F)/\mathrm{tors})$ とすればよい）を F とすると，F は階数 1 の foliation になる．X が滑らかならば，Θ_X/F が局所自由である領域は $\mathrm{Supp}\langle D \rangle$ の補集合に一致する．

D が p-closed な有理ベクトル場な場合も，局所的に同値な正則ベクトル場に置き換えて上の構成を行うことで foliation を得る．

D と D' が同値な p-closed 有理ベクトル場ならばそれらが（上述の方法で）定める foliation は一致する．

D が一般の（p-closed と限らない）ベクトル場の場合は，$\{D, D^p, D^{p^2}, \dots\}$ が生成する Θ_X の部分 $\mathcal{O}_X$ 加群の saturation は foliation になる． $\diamondsuit$

2.4 ベクトル場による商

導分・ベクトル場で消える元全体は部分環をなす．群作用で不変な元全体が部分環をなすことの類似である (cf. 命題 5.24，5.26)．標数 0 の場合と異なり，標数 p でのベクトル場によるスキームの商写像は同相写像であり，非分離であり，適切な有限性の仮定の下では有限次拡大である．その中で p-closed なベクトル場による商として p 次非分離な商を記述できる．

命題 2.9. R を環，D を R の導分とすると，$R^D := \{r \in R \mid D(r) = 0\}$ は R の部分環である．p が素数で，R で $p = 0$ ならば（すなわち，R が $\boldsymbol{F}_p$ 代数ならば），R^D は部分環 $R^{(p)} := \{r^p \mid r \in R\}$ を含み，$\mathrm{Spec}\, R \to \mathrm{Spec}\, R^D$ と $\mathrm{Spec}\, R^D \to \mathrm{Spec}\, R^{(p)}$ は同相写像である．

F が導分からなる集合ならば，$R^F := \{r \in R \mid$ 任意の $D \in F$ に対し $D(r) = 0\}$ も同様の性質を満たす． $\diamondsuit$

証明は容易である．

系 2.10. X を k 上のスキームとし，D を X 上のベクトル場（または有理ベクトル場）とする．スキーム X^D を，底空間は X と同じとし，構造層として $\mathcal{O}_X^D := \{r \in \mathcal{O}_X \mid D(r) = 0\}$ とすることで定めると，これはスキームをなし，自然な射 $\pi \colon X \to X^D$ は同相写像になり，X のアフィン開部分スキームに対しては命題 2.9 のようになる．X^D を X の D による商とよぶ．

F が foliation の場合には $\mathcal{O}_X^F := \{r \in \mathcal{O}_X \mid$ 任意の $D \in F$ に対し $D(r) = 0\}$ とすると同様の性質を満たす．これを X の F による商とよぶ． $\diamondsuit$

注 2.11. $\mathcal{O}_X^D$ が層になることの証明では，標数 p ゆえ ${\mathcal{O}_X}^{(p)} \subset \mathcal{O}_X^D$ となることが効いている．

標数 0 では一般に D 不変部分と局所化が交換しない．例えば標数 0 で $R = k[x, y]$，$D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ とすると，$R^D = k$ だが $R[\frac{1}{x}]^D = R[\frac{y}{x}]$ である． $\diamondsuit$

命題 2.12. X が整で正規ならば X^D もそうである． $\diamondsuit$

証明. $U = \operatorname{Spec} R \subset X$ を空でないアフィン開集合とする．$k(R^D) = k(X^D)$ の元が R^D 上整ならば R 上整なので R に属し，したがって $R \cap k(X^D) = R^D$ に属する． $\square$

命題 2.13. K が k を含む体で，$D \neq 0$ は K の（k 上の）p-closed な導分だとする．このとき $t \in K$ が存在し $t^p \in K^D$ かつ $K = K^D[t]$ である．とくに，K/K^D は p 次純非分離である． $\lozenge$

証明. $D \neq 0$ なので，$t \in K$ で $D(t) \neq 0$ なものが存在する．D を $D(t)^{-1}D$ で置き換えて $D(t) = 1$ と仮定できる．あとは [桂 22, 補題 3.6.6] のようにして $K = \bigoplus_{0 \leq i \leq p-1} t^i K^D$ が示せる． $\square$

命題 2.14. k 上の正規代数多様体の間の射 $X \to Y$ が同相かつ $k(X)/k(Y)$ が p 次純非分離ならば，X 上の有理ベクトル場 D が存在し $Y = X^D$ である（正確に言うなら，図式

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & X^{(p)} \\ & X^D \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

を可換にする同型写像が存在する）． $\lozenge$

証明. まず $k(X)/k(Y)$ が p 次純非分離なので $k(X) = k(Y)[T]/(T^p - a)$，$a \in k(Y)$ と書ける．$k(Y)[T]$ の（$k(Y)$ 上の）導分 $\frac{\partial}{\partial T}$ は $k(X) = k(Y)[T]/(T^p - a)$ 上の導分（これも $\frac{\partial}{\partial T}$ と書く）を誘導し，不変部分環は明らかに $k(Y)$ である．

$\frac{\partial}{\partial T}$ を X 上の有理ベクトル場とみなしたものを D とおく．$k(X^D) \subset k(Y)$ は明らかだが，等号が成立することを示す．$\xi \in k(X^D)$ とする．適当なアフィン開集合 $\emptyset \neq U = \operatorname{Spec} R \subset X$ において $\xi = \frac{b}{c}$，$b, c \in R$ と書ける．すると $\xi = \frac{bc^{p-1}}{c^p}$ であり，$D(\xi) = 0$ と $D(c^p) = 0$ より $D(bc^{p-1}) = 0$ なので ξ は $U^D = \operatorname{Spec} R^D$ の関数体に属する．

$X \to X^D$，$X^D \to X^{(p)}$，$X \to Y$ はすべて同相なので，X のアフィン開集合 U で $\mathcal{O}_X|_U$ の部分層 $\pi^{-1}\mathcal{O}_Y|_U \subset \mathcal{O}_X|_U$ 等を比較すればよい．以下 π^{-1} や $|_U$ は省略する．すると，X と Y が正規という仮定から，$\mathcal{O}_{X^D}$ と $\mathcal{O}_Y$ のどちらも $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ の $k(Y) = k(X^D)$ での整閉包なので，一致する． $\square$

系 2.15. X を正規代数多様体とする．次の対象全体の集合の間に一対一対応がある．

- $k(X)$ の部分体 K' で，$k(X)/K'$ が p 次純非分離であるもの（自動的に k を含む）．
- X 上の 0 でない p-closed 有理ベクトル場の同値類．
- X 上の階数 1 の foliation．
- X から正規代数多様体 Y への射で，同相であり，$k(X)/k(Y)$ が p 次純非分離であるものの同型類（命題 2.14 参照）． $\lozenge$

証明. foliation 以外の対応は命題 2.13，2.14 から従う．ベクトル場と foliation の対応は例 2.8. $\square$

注 2.16. 一般に $k(X)/k(X)^{(p)}$ の中間体と（任意階数の）foliation が対応する（Jacobson 対応）．体のガロア拡大の中間体と部分群の対応の類似である． $\lozenge$

3　ベクトル場と商の局所的記述

3.1　滑らかな多様体上のベクトル場と商

X を k 上の滑らかな n 次元代数多様体とし，D を X 上のベクトル場とする．$x_1,\dots,x_n$ が閉点 P の近傍での局所座標のとき，D は $D=\sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ と表せる（f_j は正則関数）．以下 $D \neq 0$ とする．最大公約数で括って $D = f \cdot \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$，$g_j$ は正則，$(g_1 = \cdots = g_n = 0)$ は余次元 2 以上，とできる．このとき，$(D) := (f=0)$ と $\langle D \rangle := (g_1 = \cdots = g_n = 0)$ は局所座標のとり方および f のとり方によらず定まり，(D) は因子になり，$\langle D \rangle$ は余次元 2 以上の閉部分スキームになる．(D) を D の因子部分，$\langle D \rangle$ を D の非因子部分とよぶ．

（[RS76] では (D) を divisorial singularity とよび，$n=2$ の場合には $\langle D \rangle$ を isolated singularity とよんでいるが，特異点をもつ曲面を扱う際にややこしいので私はこのよび方を採用していない．）

一般に X が滑らかと限らない場合は，部分集合 $\mathrm{Im}(D) \subset \mathcal{O}_X$ が生成するイデアルに対応する閉部分スキームを $\mathrm{Fix}(D)$ とおき D の**固定点集合** (*fixed locus*) とよぶ．

注 3.1. 有限群スキーム G のスキーム X への作用についても $\mathrm{Fix}(G)$ が定義される．群 $G(k)$ も $X(k)$ に作用し，G が定数群スキームならば $\mathrm{Fix}(G)(k) = \mathrm{Fix}(G(k))$ が成り立つが，一般には一致しない（例えば G が μ_p や α_p のとき $G(k)$ は自明な群なので）．G が μ_p や α_p のとき，$\mathrm{Fix}(G)$ は対応するベクトル場の固定点集合と一致する． $\Diamond$

D が p-closed のとき，$\langle D \rangle$ に属さない点の近傍では次のように簡単な形に書ける．

命題 3.2. X が滑らかで，$D \neq 0$ が p-closed で，$P \notin \mathrm{Supp}\langle D \rangle$ のとき，局所座標 $x_1,\dots,x_n$ をうまくとると $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ になる．このとき，X^D は $\pi(P)$ で滑らかであり，$x_1^p, x_2, \dots, x_n$ は $\pi(P)$ での局所座標になる．さらに $P \notin \mathrm{Fix}(D)$ かつ D が加法型ならば $f_1 = 1$ にできる． $\Diamond$

証明. 前半は [Ses60, Proposition 6] で（ベクトル場の個数を一般化した形で）示されているようだが，私はちゃんと読んでいない．補題 3.13（これは滑らかでなくても成り立つ）を使うのが簡単だと思う．

最後の主張は補題 3.14 から従う． $\square$

乗法型の導分の固定点では D を "対角化" できる．

命題 3.3. X が滑らかで，D が乗法型で，$P \in \mathrm{Fix}(D)$ のとき，局所座標 $x_1,\dots,x_n$ をうまくとると $D = \sum_{j=1}^n a_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$，$a_j \in \boldsymbol{F}_p$ となる．このとき $\mathrm{Fix}(D)$ に対応するイデアルは $(x_j = 0 \mid j \in \{1,\dots,n\}, a_j \neq 0)$ である． $\Diamond$

証明. [RS76, Theorem 2] でも証明されているようなのだが，証明がややこしそうなので読んでいない．以下に述べる私の証明（[Mat23a, Proposition 2.8] の (1) $\implies$ (2)）の方が簡単だと思う．

命題 5.24，系 5.25 で見るように，乗法型ベクトル場 D は $\mathcal{O}_X$ の $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 次数付き k 代数構造 $\mathcal{O}_X = \bigoplus_{i \in \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}} (\mathcal{O}_X)_i$ に対応しており，$\mathrm{Fix}(D)$ は $\bigoplus_{i \neq 0} (\mathcal{O}_X)_i$ が生成するイデアルに対応する．$\mathcal{O}_{X,P}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とおく．$P \in \mathrm{Fix}(D)$ より，$\bigoplus_{i \neq 0} (\mathcal{O}_{X,P})_i \subset \mathfrak{m}$ である．$t \in \mathfrak{m}$ に対し，上より $i \neq 0$ に対して $\delta_i(t) \in \mathfrak{m}$ であり（δ_i は第 i 成分への射影），$\sum_{i \in \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}} \delta_i = \mathrm{id}$ より $i = 0$ に対してもそうである．したがって $\mathfrak{m}$ は $\bigcup_{i \in \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}} ((\mathcal{O}_{X,P})_i \cap \mathfrak{m})$ の元で生成される．その中から $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ で 1 次独立な n 個 $x_1,\dots,x_n$ をとればそれが $\mathfrak{m}$ を生成し，$x_j \in (\mathcal{O}_{X,P})_{a_j}$ とおくと $D(x_j) = a_j x_j$ なのでこの座標に関して D は所望の形になる． $\square$

系 3.4. X が滑らかで D が乗法型ならば，$\mathrm{Fix}(D)$ は滑らかな閉部分多様体いくつかの非交差和である（次元は各連結成分ごとに異なりうる）． $\diamondsuit$

余談 3.5. 群スキーム μ_p の作用は乗法型導分と一対一に対応する（命題 5.23）．命題 3.3 と同様にして，μ_p の表現はすべて対角化可能であることが分かる．「表現がすべて対角化可能」よりもう少し広くかつ有用なクラスとして，「表現の圏が半単純」を満たす有限群スキーム全体のクラスが考えられ，これを満たす有限群スキームは**線形簡約** (*linearly reductive*) であるという．linearly reductive である典型的な例は μ_p および位数が p と素な定数群スキームであり，linearly reductive でない典型的な例は α_p および $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ である．標数 0 での有限群による商特異点は比較的「良い」性質を満たすことが知られているが，そのいくつかは標数 p での linearly reductive な有限群スキームによる商特異点においても成り立つことを [LMM21a] で示した．

3.2 X が滑らかな場合の X^D の特異点

X が点 P で滑らかだとする．$P \notin \mathrm{Supp}\langle D\rangle$ ならば，命題 3.2 より X^D も点 $\pi(P)$ で滑らかになる．逆も成り立つ（が，強い定理を使う）：

命題 3.6. X が P で滑らかで，$P \in \mathrm{Supp}\langle D\rangle$ ならば，X^D は $\pi(P)$ で滑らかでない． $\diamondsuit$

証明. 対偶を示す．X^D が $\pi(P)$ で滑らかだとする．定理 3.7 より，X の P での局所座標 $x_1, \dots, x_n$ で，$x_1^p, x_2, \dots, x_n$ が $\pi(P)$ での局所座標であるものがとれる．すなわち $D = f\frac{\partial}{\partial x_1}$ なので $P \notin \mathrm{Supp}\langle D\rangle$ である． $\square$

定理 3.7 ([KN82, Corollary 1])**.** R が k 上の正則局所環で，R' は $R^{(p)} \subset R' \subset R$ を満たし，かつ正則ならば，R の正則巴系 $x_1, \dots, x_n$（すなわち，$n = \dim R$ かつ $(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{m}_R$）で $x_1, \dots, x_s, x_{s+1}^p, \dots, x_n^p$ が R' の正則巴系になるものが存在する． $\diamondsuit$

$\mathrm{Supp}\langle D\rangle$ の点の像がどのような特異点になるか考えよう．

まず D が乗法型，すなわち μ_p の作用に対応する場合を考える．このとき，命題 3.3 より適切な局所座標に対して $D = \sum_{j=1}^n a_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$，$a_j \in \boldsymbol{F}_p$ となる．以下しばらく（例 3.8 の終わりまで），簡単のために $R = \mathcal{O}_X$ が多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ であるかのように書く．一般の場合もこの環上エタールなので概ね変わりない．このとき $\mathrm{Fix}(D)$ は $(x_j = 0 \mid a_j \neq 0)$ である．各単項式が D に関する固有ベクトルになり，R^D は固有値 0 の固有ベクトル全体がなす部分環である．すなわち $S = R^D = k[x^i \mid a \cdot i = 0]$ である．ただし $i = (i_1, \dots, i_n) \in \boldsymbol{N}^n$ は多重添字で，$a \cdot i := \sum_{j=1}^n a_j i_j \in \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ とする．

例 3.8. $n = 2$ で，$a_1, a_2 \neq 0$ とする．このとき原点の像は孤立特異点である．$a_1 + a_2 = 0$ の場合，$S = k[x^p, y^p, xy] \cong k[X, Y, Z]/(Z^p - XY)$ であり，これは A_{p-1} 型有理二重点である．$a_1 + a_2 \neq 0$ の場合（このとき $p > 2$ である），S の原点での極大イデアルを $\mathfrak{n}$ とすると $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \geq 4$ なので，原点は有理二重点でない孤立特異点である．いずれの場合も，最小特異点解消は例外曲線が鎖状に連なった形である．（D に $\boldsymbol{F}_p^*$ の元を掛けることで）一般性を失わず $a_1 = 1$，$0 < a_2 < p$ としてよく，このとき特異点は $\frac{1}{p}(1, a_2)$ 型とよばれる．さらに，例外曲線の本数および各例外曲線の自己交点数は，有理数 $\frac{p}{a_2}$ の Hirzebruch–Jung 型連分数表示を用いて表せることが知られている．

ちなみに，$a_1 = a_2 = 1$ の場合，$S = k[x^p, x^{p-1}y, \dots, xy^{p-1}, y^p]$ であるが，このとき $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = p + 1$ で

あり，p を動かすときこれは有界でない． $\Diamond$

次に D が加法型，すなわち α_p の作用に対応する場合を考える．といっても，一般的に言えることは少ない．2 次元の場合を考え，さらに簡単のため完備化して $R = k[[x, y]]$ として考える．

例 3.9. 標数 2 で，m を正整数とする．$D = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^{2m}\frac{\partial}{\partial y}$ は加法型で，$R^D = k[[x^2, y^2, x^2y + xy^{2m}]] = k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^2Y + XY^{2m})$ は D^0_{4m} 型有理二重点である．なお D^0_{4m} の右上の 0 は，最小特異点解消の双対グラフが同じ Dynkin 図形をもつ特異点の同型類が正標数では一般に複数存在するためそれを区別する記号（[Art77] 参照）だが，とりあえず気にしなくてもよい．

この他，標数 2 の E^0_8，標数 3 の E^0_6，標数 5 の E^0_8 は α_p 商特異点である．

ちなみに標数 p の $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 商特異点になっている有理二重点は標数 2 の D^k_{4k} と E^2_8，標数 3 の E^1_6，標数 5 の E^1_8 である． $\Diamond$

例 3.10. 標数は 2 とする．奇数 $2m + 1 \geq 3$ に対して，$D = (x^2 + xy^{2m})\frac{\partial}{\partial x} + y^{2m+1}\frac{\partial}{\partial y}$ とおくと，$D^2 = y^{2m}D$ なので D は乗法型や加法型ではないが p-closed であり，$R^D = k[[x^2, y^2, x^2y + xy^{2m+1}]] = k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^2Y + XY^{2m+1})$ は D^0_{4m+2} 型有理二重点である．

同様に，$D = xy^2\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^3)\frac{\partial}{\partial y}$ とおくと，$D^2 = y^2D$ なので D は p-closed であり，$R^D = k[[x^2, y^2, x^3 + xy^3]] = k[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + XY^3)$ は E^0_7 型有理二重点である． $\Diamond$

例 3.11. 標数は 3 とする．$D = y^4\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ とおくと，$D^3 = y^3D$ なので D は p-closed であり，$R^D = k[[x^3, y^3, x^2 + y^5]] = k[[X, Y, Z]]/(-Z^3 + X^2 + Y^5)$ は E^0_8 型有理二重点である． $\Diamond$

余談 3.12. p-closed な導分による商特異点になっている有理二重点は，例 3.8 の最初の 3 文，例 3.9，例 3.10，例 3.11 で挙げたもので尽くされることを示した（[Mat23b, Lemma 3.6]）．

標数が小さければ一般の 2 次元 α_p 商特異点の具体的な形を与えることも不可能ではない．標数 2 のときの 2 次元の α_2 商特異点の一般形は [Mat23b, Theorem 3.8] で与えた．Artin [Art75, Theorem] による $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 商特異点の一般形と類似する．

ちなみに $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 作用の商特異点も一般に難しい．上記 Artin の結果のほか，Peskin [Pes83, Corollary 5.15] は標数 3 のときの 2 次元 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 商特異点の一部について一般形を与えている．

ところで，$\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ の場合と α_2 の場合の標準形を見比べると（あるいは例 3.9 の前半と後半を見比べると），いかにも両者を 1 パラメータでつなぐことができそうである．例えば宮西–伊藤 [MI21, Chapter II.7] を参照せよ．

3.3 滑らかと限らない多様体上のベクトル場と商

まず $\mathrm{Fix}(D)$ が Cartier 因子になっている領域で考える（このとき，局所的には D を同値で置き換えて $\mathrm{Fix}(D) = \emptyset$ にできる）．

補題 3.13 ([Mat23b, Lemma 2.8][*6])**.** $(R, \mathfrak{m})$ が正規な Noether 局所整域で，剰余体は k に同型で，$D \neq 0$ が p-closed な導分で，$\mathrm{Fix}(D)$ が Cartier 因子だとする．このとき $\mathfrak{m}$ の生成系として，$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 個の元か

[*6] 引用元では R に関する仮定が不足していることに注意する．$h \in R$ を導く際に R が Noether かつ正規という条件を使っている．cf. 注 2.4.

らなり，かつ 1 つの元を除き R^D に含まれているものがとれる． ◊

証明. $\mathrm{Fix}(D)$ が Cartier なので $\mathrm{Im}(D)$ が生成するイデアルはある $f \in R$ で生成される．D を $f^{-1}D$（これも R に値をとる p-closed な導分である）で置き換えることで，$\mathrm{Fix}(D) = \emptyset$ と仮定できる．

$\mathrm{Fix}(D) = \emptyset$ なので，$y \in R$ で $D(y) \notin \mathfrak{m}$ なるものが存在する．k の元だけずらして $y \in \mathfrak{m}$ としてよい[*7]．$w := y^{p-1}$ とおくと，$0 \le k \le p-2$ のとき $D^k(w) \in (y) \subset \mathfrak{m}$，かつ $D^{p-1}(w) \notin \mathfrak{m}$ が成り立つ．$u := D^{p-1}(w) - hw$ とおくと（$h \in R$ は $D^p = hD$ を満たす元），$u \in R^D \cap R^*$ である．

R^D 線形な写像 $\pi\colon R \to R$ を

$$\pi(x) = ux + \sum_{0 \le j \le p-2} (-1)^j D^j(w) D^{p-1-j}(x)$$

で定めると，$\mathrm{Im}(\pi) \subset R^D$ であり，一方で $\pi(x) \equiv ux \pmod{(y)}$ が成り立つ．

B を $\mathfrak{m}$ の生成系とすると，$B' := \{y\} \cup \pi(B)$ も生成系であり，かつ $B' \setminus \{y\} \subset R^D$ である．$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は有限次元なので，B として $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の基底の持ち上げをとると $|B'| = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + 1$ であり，したがって $|B''| = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ なる部分集合 $B'' \subset B'$ で $\mathfrak{m}$ を生成するものがとれる．$B'' \subset \pi(B)$ だとすると，$(D(R)) = (D(\mathfrak{m})) = (D(kB'' + \mathfrak{m}^2)) \subset (0) + \mathfrak{m}$ となり，$\mathrm{Fix}(D) = \emptyset$ という仮定に反する．したがって B'' は y を含む． □

とくに，X がこの点で滑らかな場合に適用することで，命題 3.2 を得る．

補題 3.14 ([Mat23b, Lemma 2.9])**.** 補題 3.13 の設定で，$\mathrm{Fix}(D) = \emptyset$ かつ D が加法型ならば，「1 つの元」y を $D(y) = 1$ を満たすようにとれる． ◊

証明. $y \in \mathfrak{m}$ が $D(y) \notin \mathfrak{m}$ を満たすとする．$u := D^{p-1}(y^{p-1})$ とおくと $u \in B^* \cap B^D$ である．したがって $D^{p-1}(u^{-1}y^{p-1}) = 1$ なので，$y' := D^{p-2}(u^{-1}y^{p-1})$ とおくとこの元が条件を満たす． □

ところで，X が滑らかでなくても X^D が滑らかになる場合もある．

例 3.15. S を例 3.8 の商特異点とし，$S' = k[x^p, y^p] \subset S$ とする．S の導分 D を $D(x^i y^j) = i x^i y^j$ で定めると，$S^D = S'$ は滑らかである．$\mathrm{Fix}(D)$ に対応するイデアル I は $\{x^i y^j \in S \mid p \nmid i\}$ で生成される．例 3.8 の記号で $a_1 + a_2 = 0$ ならば，I は 1 元 xy で生成されるので単項イデアルであり，$D' := (xy)^{-1}D$ は $\mathrm{Fix}(D') = \emptyset$ を満たす．$a_1 + a_2 \neq 0$ ならば，I は単項イデアルではない． ◊

例 3.16. $m \geq 1$，$f \in (x,y)^2 \subset k[[x,y]]$ とし，偏微分 f_x, f_y が生成するイデアルは (x,y)-primary だとする．$R = k[[x,y,z]]/(z^{mp} - f(x,y))$ とするとこれは孤立特異点である．$k[[x,y,z]]$ の導分 $D = \frac{\partial}{\partial z}$ は R の導分を誘導する（これも D と書く）．$Z := z^p \in R^D$ であり $R^D = k[[x,y,Z]]/(Z^m - f(x,y))$ である．$m = 1$ ならば R^D は滑らかである．$m > 1$ なら R^D は特異だが，R よりはマイルドな特異点だといえそうである． ◊

$\mathrm{Fix}(D)$ が Cartier 因子になっていない場合が当然複雑である．X が点 P で滑らかな場合，この条件は $\mathrm{Fix}(D)$ の孤立部分 $\langle D \rangle$ が 0 でないことと同値であり，その場合は命題 3.6 で見た．P で滑らかでない場合についてはよく知らない．ひとまず，完備化と商が交換することを紹介しておく．

補題 3.17. R は k 上有限生成代数の極大イデアル $\mathfrak{m}$ での局所化とし，D は R の導分とする．このとき D は R の完備化 $\hat{R} = \varprojlim_n R/\mathfrak{m}^n$ 上の連続な導分に自然に延長する． ◊

[*7] ここでさらに D を $D(y)^{-1}D$ で置き換えれば $D(y) = 1$ にできる．その方が分かりやすければそうしてもよい．

証明. $D\colon R \to R$ は $D(\mathfrak{m}^n) \subset \mathfrak{m}^{n-1}$ を満たす（Leibniz 則から）ので，$\mathfrak{m}$ 進位相に関して連続であり，$\mathfrak{m}$ 進完備化の間の射を誘導する． $\square$

注 3.18. k が標数 0 の代数閉体のときは，$\Omega^1_{k[[x_1,\ldots,x_n]]/k}$ は $\sum_{i=1}^n k[[x_1,\ldots,x_n]] \cdot dx_i$ より真に大きい気配がする（参考：[SP, Tag 02JD]）．補題 3.17 から $D \in \mathrm{Hom}(\Omega^1_{k[[x_1,\ldots,x_n]]/k}, k[[x_1,\ldots,x_n]])$ は $D(x_1),\ldots,D(x_n)$ だけから定まるが，証明は D の終域が $\mathfrak{m}$ 進完備であることを使っていることに注意する．

一方，k が標数 $p>0$（の代数閉体）のときは，k 上の導分 $D\colon k[[x_1,\ldots,x_n]] \to M$ は $k[[x_1^p,\ldots,x_n^p]]$ 線形になるため，$D(x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n})$（$(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1,\ldots,p-1\}^n$）のみから定まり，したがって $D(x_1),\ldots,D(x_n)$ のみから定まるので，$\Omega^1_{k[[x_1,\ldots,x_n]]/k} = \sum_{i=1}^n k[[x_1,\ldots,x_n]] \cdot dx_i$ となる． $\lozenge$

命題 3.19 ([Tzi17, Proposition 3.1(1)])**.** $R, \hat{R}, D$ を補題 3.17 の通りとする．商 $(\hat{R})^D$ は R^D の極大イデアル $\mathfrak{m} \cap R^D$ での完備化と自然に同型になる． $\lozenge$

3.4 2 次元の場合の “双対” ベクトル場

X を正規代数多様体，D を p-closed な有理ベクトル場とする．

命題 3.20 ([Mat23b, Lemma 2.11])**.** $\mathrm{Sing}(X) = \mathrm{Supp}\langle D\rangle = \emptyset$ と仮定する．このとき次を満たす $\eta \in \Omega^1_{X^D} \otimes \mathcal{O}_{X^D}(\pi_*(D))$ が一意に存在する．

- η は $\mathrm{Ker}(\pi^*\colon \Omega^1_{X^D} \to \pi_*\Omega^1_X) \otimes \mathcal{O}_{X^D}(\pi_*(D))$ の生成元である．
- $\mathrm{div}\, D(f) = (D)$ を満たす任意の $f \in \mathcal{O}_X$ に対し，$\eta = \frac{d(f^p)}{D(f)^p}$ が成り立つ．
- 任意の $f \in \mathcal{O}_X \setminus \mathcal{O}_X^D$ に対し，有理微分形式の意味で前項と同じ等式が成立する（または，任意の $f \in \mathcal{O}_X$ に対し $D(f)^p \cdot \eta = d(f^p)$ が成り立つと言ってもよい）．

（なお，一般に標数 p の環の元 $r \in R$ に対し Ω^1_R で等式 $d(r^p) = 0$ が成り立つが，f^p は $\mathcal{O}_{X^D}$ の元としては p 乗ではないことに注意する．） $\lozenge$

証明は補題 4.5 を見よ．

例 3.21. D が乗法型のとき，$D(f) = f$ を満たす $f \in \mathcal{O}_X$ が存在し，これを用いて $\eta = d\log(f^p) := \frac{d(f^p)}{f^p}$ と表せる．D が加法型で $(D) = 0$ のとき，$D(f) = 1$ を満たす $f \in \mathcal{O}_X$ が存在し，これを用いて $\eta = d(f^p)$ と表せる．

[BM76] では（Enriques 曲面 X^D の μ_2 または α_2 被覆 $X \to X^D$ に対して）η をこのように与えており，これをヒントに一般化した． $\lozenge$

ここから 3 節の終わりまで $\dim X = 2$ とする．$\pi\colon X \to Y := X^D$ の “双対” となる射 $\pi'\colon Y \to X^{(p)}$ を考えると，π' も同相写像で純非分離で p 次なので，π' は Y 上のある有理ベクトル場 D_Y による商として書ける．Y 上の有理 2 次微分形式 ω_Y が与えられているとき，D_Y の標準的なとり方がある：$f \in \mathcal{O}_Y$ に対し，$D_Y(f) \cdot \omega_Y = df \wedge \eta$ で定める．この D_Y に対して $\mathcal{O}_Y^{D_Y} = \mathcal{O}_{X^{(p)}}$ が成り立つことを示そう．$g \in \mathcal{O}_X$ に対し，$d(g^p) \in \Omega^1_Y \otimes \mathcal{O}_Y(\pi_*(D))$ を引き戻すと $\pi^*(d(g^p)) = 0 \in \Omega^1_X(p(D))$ なので，$d(g^p)$ は η の関数倍であり，したがって $\wedge\eta$ すると 0 である．したがって $D_Y(g^p) = 0$ なので，$\mathcal{O}_{X^{(p)}} \subset \mathcal{O}_Y^{D_Y}$ が成り立つ．両辺は正規なので，拡大次数を比較して等式を得る．

ところで，$\mathrm{Sing}(X) = \mathrm{Supp}\langle D\rangle = \emptyset$ という仮定を外して X は正規とだけ仮定すると，$Y = X^D$ は特異点をもちうるが，Y は正規であり $\mathrm{Sing}(Y) \subset \pi(\mathrm{Sing}(X) \cup \mathrm{Supp}\langle D\rangle)$ は余次元 2 以上なので，その補集合 Y^{sm} では η が定義され，また Y^{sm} 上の有理 2 次微分形式 ω_Y があれば Y^{sm} 上の有理ベクトル場 D_Y が定まる．ところが，一般に Y が正規のとき Y^{sm} 上の（有理）ベクトル場は Y 上の（有理）ベクトル場に自然に延長することが補題 3.22 を用いて示せる．

補題 3.22. A がネーター整閉整域なら，A は高さ 1 以下の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対する $A_{\mathfrak{p}}$ の共通部分に等しい．

X がネーター正規整スキーム，$Z \subset X$ が余次元 2 以上の閉部分スキームのとき，$j\colon X \setminus Z \hookrightarrow X$ を包含写像とすると，制限写像 $\mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_{X\setminus Z}$ は同型である． $\Diamond$

以上をまとめてさらに議論すると次を得る．

命題 3.23 ([Mat23b, Proposition 2.15])**.** X, Y は正規代数曲面（完備と限らない）で，$\pi\colon X \to Y$ は p-closed な有理ベクトル場 D による商で，$\omega_Y \in H^0(Y^{\mathrm{sm}}, \Omega_Y^2 \otimes k(Y)) \setminus \{0\}$ は有理 2 次微分形式とする．このとき Y^{sm} 上の有理 1 次微分形式 $\eta \in \Omega^1_{Y^{\mathrm{sm}}} \otimes \mathcal{O}_Y(\pi_*(D))$ と Y 上の有理ベクトル場 $D_Y \in H^0(Y, \Theta_Y \otimes k(Y))$ が一意に存在し，η は命題 3.20 で述べた関係を満たし，さらに $f \in \mathcal{O}_Y$ に対し $D_Y(f) \cdot \omega_Y = df \wedge \eta$ が（$H^0(Y^{\mathrm{sm}}, \Omega_Y^2)$ での等式として）成立する．D_Y は p-closed である．

ω_Y が正則（つまり $H^0(Y^{\mathrm{sm}}, \Omega_Y^2)$ の元）かつ non-vanishing（つまり各点で Ω_Y^2 を生成する）ならば Y^{sm} 上で $\mathrm{Zero}(\eta)$ の因子部分 $\pi_*(D)$ と (D_Y) は因子として一致する．加えて X^{sm} 上で $(D) = 0$ ならば $(D_Y) = 0$ で η の零点は余次元 2 以上である． $\Diamond$

注 3.24. 命題 3.23 では X は正規と仮定しなくてもよく（Y は正規とする），その場合 Y^D は $X^{(p)}$ の正規化になる．6 節では Y から出発して被覆 X を作る議論を行うが，このとき必ずしも X は正規にならない．$\mathrm{Sing}(X)$ が 1 次元になる場合も含めて $\mathrm{Sing}(X)$ と $\mathrm{Zero}(\eta)$ は一致する． $\Diamond$

4　ベクトル場と商の大域的性質

4.1　標準因子の比較・微分形式の比較

X を n 次元正規多様体とし $X \to X^D = Y$ を p-closed ベクトル場による商とする．このとき，命題 3.2 より，$\mathrm{Sing}(X)$ と $\langle D\rangle$（両方余次元 2 以上）を除けば X^D は滑らかになる．X と X^D の標準因子の比較を考えるにあたり，正規代数多様体の標準因子は余次元 2 以上の閉部分スキームを無視して定義できるので，X と X^D が滑らかな場合を考えれば十分である．

標数と素な r に対する $\boldsymbol{Z}/r\boldsymbol{Z}$ 商写像 $\pi\colon X \to Y$ の場合を復習すると，$\pi^*\Omega_Y^n \to \Omega_X^n$ が単射で像が $\Omega_X^n(-(r-1)R)$，ただし R は分岐因子，であることが証明でき，系として標準因子の間の等式 $K_X \sim \pi^*K_Y + (r-1)R$（$\sim$ は線形同値）が得られる（簡単な例として $\mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{Spec}\, k[x_1^r, x_2, \ldots, x_n]$ を考えよ）．p-closed な導分による商写像 π に対して同様の比較を考えたい．

$\pi\colon X \to Y$ が非分離の場合，$\pi^*\Omega_Y^1 \to \Omega_X^1$ は単射でなく像の階数は n より真に小さくなり，したがって $\pi^*\Omega_Y^n \to \Omega_X^n$ は 0 射になってしまう（簡単な例として $\mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{Spec}\, k[x_1^p, x_2, \ldots, x_n]$ を考えよ）．そのため状況は複雑になるのだが，結果としては標数と素な巡回被覆の場合と同様の公式が得られる：

命題 4.1 ([RS76, Corollary 1 to Proposition 3])**.** X が正規代数多様体，$D \neq 0$ が X 上の（有理）p-closed

ベクトル場ならば，商写像を $\pi\colon X\to X^D$ とおくとき，$K_X\sim \pi^*K_{X^D}+(p-1)(D)$ が成り立つ． ◊

私は Rudakov–Shafarevich 公式とよんでいるが，一般的なよび方かは分からない．

しかし Rudakov–Shafarevich の証明が気に入らなかったので，より精密に，微分形式の層を比較する形で定式化した．これにより X 上の D 不変な微分形式と X^D 上の微分形式を対応させせることができる．

命題 4.2 ([Mat23b, Proposition 2.12])**.** X，D，π を命題 4.1 の通りとし，$\mathrm{Sing}(X)=\mathrm{Supp}\langle D\rangle=\emptyset$ と仮定する．このとき $\mathcal{O}_X$ 加群の同型

$$\pi^*(\Omega^n_{X^D}(\pi_*(D)))=\pi^*\Omega^n_{X^D}\otimes\mathcal{O}_X(p(D))\xrightarrow{\sim}\Omega^n_X((D))\colon$$
$$f_0\cdot df_1\wedge\cdots\wedge df_{n-1}\wedge\frac{d(g^p)}{D(g)^p}\mapsto f_0\cdot df_1\wedge\cdots\wedge df_{n-1}\wedge\frac{dg}{D(g)}$$

（ただし $f_1,\dots,f_{n-1}\in\mathcal{O}_X^D$，$f_0,g\in\mathcal{O}_X$）がある．微分形式の零点も対応する．

D 不変部分をとると，$\pi_*(\Omega^n_X((D)))^D\cong\Omega^n_{X^D}(\pi_*(D))$ を得る（微分形式への導分の作用については定義 4.3）．

さらに大域切断をとって $H^0(X,\Omega^n_X((D)))^D\cong H^0(X^D,\Omega^n_{X^D}(\pi_*(D)))$ を得る． ◊

証明は 4.2 節で行う．一言で言うと，1 次微分形式の引き戻し $\pi^*\colon\pi^*\Omega^1_{X^D}\to\Omega^1_X$ の核と余核を求めればよい．

定義 4.3 ([Mat23b, Definition 2.5, Proposition 2.6])**.** D が X 上のベクトル場であるとき，次の条件を満たす $\mathcal{O}_X$ 加群の準同型の族 $(D_q\colon\Omega^q_X\to\Omega^q_X)_{q\geq 0}$ が一意に定まる．

- $D_0=D$.
- $D_1(df)=d(D_1(f))$.
- $D_{q+q'}(\beta\wedge\beta')=D_q(\beta)\wedge\beta'+\beta\wedge D_{q'}(\beta')$．ただし $\beta^{(\prime)}$ は $q^{(\prime)}$ 次微分形式.

なお，一般に $D^p=hD$ のとき $(D_q)^p=hD_q$ とは限らないが，$dh=0$ ならば（例えば $h\in k$ ならば）$(D_q)^p=hD_q$ が成り立つ. ◊

余談 4.4. K3 曲面 X の主要な性質の 1 つは $\Omega^2_X\cong\mathcal{O}_X$ である．したがって大域 2 次微分形式の空間 $H^0(X,\Omega^2_X)$ は 1 次元 k ベクトル空間である．有限群 G の X への作用はこの 1 次元空間への作用を誘導し，G の位数が標数と素なときには，微分形式への作用が自明であることと商 $Y:=X/G$ の最小特異点解消が再び K3 曲面になることの同値性が知られていた（標数 0 の場合は [Nik79, Sections 4–5]）．このとき Y の 0 でない大域 2 次微分形式（の Y^{sm} への制限）の引き戻しは X の 0 でない大域 2 次微分形式（の $X\setminus\mathrm{Fix}(G)$ への制限）である．

[Mat23a] の主結果は標数 p での μ_p 作用について同様の同値が成り立つというものである．このとき X の大域 2 次微分形式と $X/\mu_p=X^D$ の大域 2 次微分形式は命題 4.2 の最後の同型で対応する．詳細は 5.7 節で述べる．

4.2 微分形式の比較の証明

X などを命題 4.2 の通りとする．すなわち，X は滑らかな代数多様体，$D\neq 0$ は X 上の有理 p-closed ベクトル場で $\langle D\rangle=0$ だとし，$\pi\colon X\to X^D$ を商写像とする．X^D は X とそのフロベニウス像 $X^{(p)}$ の間にあ

る（cf. 系 2.15）ので，次の図式がある．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "F_X"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X^{(p)} \arrow[dr, "\pi^{(p)}"] & \\
& X^D \arrow[ur, "\pi'"] \arrow[rr, "F_{X^D}"'] & & X^{D(p)}
\end{tikzcd}$$

補題 4.5. 微分形式を引き戻す射 $\pi^*\colon \pi^*\Omega^1_{X^D} \to \Omega^1_X$ の核と余核は次の完全列で表される：

$$0 \to \mathcal{O}_X(-p(D)) \xrightarrow{\overline{\pi'^*}} \pi^*\Omega^1_{X^D} \xrightarrow{\pi^*} \Omega^1_X \xrightarrow{\bar{D}} \mathcal{O}_X(-(D)) \to 0,$$

ここで，$\bar{D}$ は $\bar{D}\circ d = D$ で定まる射（命題 2.1 から一意に存在する $\mathcal{O}_X$ 加群の準同型 $\Omega^1_X \to \mathcal{O}_X$）であり，$\overline{\pi'^*}$ は次の図式（1 行めは完全）と同型 $F_X^*(\mathcal{O}_{X^{(p)}}(-(D)^{(p)})) = \mathcal{O}_X(-p(D))$ から定まる射である．

$$\begin{tikzcd}
F^*_{X^D}\Omega^1_{X^{D(p)}} \arrow[r, "\pi^{(p)*}"] \arrow[dr, "0"'] & \pi'^*\Omega^1_{X^{(p)}} \arrow[r, "\overline{D^{(p)}}"] \arrow[d, "\pi'^*"] & \pi'^*\mathcal{O}_{X^{(p)}}(-(D)^{(p)}) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\overline{\pi'^*}"] & 0 \\
& \Omega^1_{X^D} & &
\end{tikzcd}$$

完全列から得られる同型 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\pi^*\otimes\mathcal{O}_X(p(D)))$ による 1 の像を η とおき，$\mathrm{Coker}(\pi^*\otimes\mathcal{O}_X((D))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$ による 1 の逆像を ξ とおくと，$\mathrm{div}(D(f)) = (D)$ を満たす任意の $f \in \mathcal{O}_X$ に対し $\eta = \frac{d(f^p)}{D(f)^p}$，$\xi = \frac{df}{D(f)}$ である．（有理 1 次微分形式の意味でなら，任意の $f \in \mathcal{O}_X \setminus \mathcal{O}_X^D$ で成り立つ．） $\Diamond$

証明. 完全性を示すには局所的に考えてよい．命題 3.2 より，X の局所座標 $x_1,\dots,x_n$ で $x_1^p, x_2,\dots,x_n$ が X^D の局所座標になるものがとれる．このとき $D = \phi\frac{\partial}{\partial x_1}$，$\phi\in k(X)$，と書けて，$(D) = \mathrm{div}(\phi)$ である．この表示の下で，問題の列は

$$0 \to \langle\phi^p\rangle \xrightarrow{\overline{\pi'^*}} \langle d(x_1^p), dx_2, \cdots dx_n\rangle \xrightarrow{\pi^*} \langle dx_1, dx_2, \cdots dx_n\rangle \xrightarrow{\bar{D}} \langle\phi\rangle \to 0,$$

$\overline{\pi'^*}(\phi^p) = d(x_1^p)$，$\bar{D}(dx_1) = \phi$ であり，明らかに完全である．

η と ξ の表示については，$x_1,\dots,x_n$ を上の通りとし，$f = \sum_{j=0}^{p-1} f_j x_1^j$，$f_j \in \mathcal{O}_X^D$ と書くと，d と D は Leibniz 則を満たすので，$\Omega^1_{X^D}$ と $\mathcal{O}_X$ においてそれぞれ

$$d(f^p) = \sum f_j^p d((x_1^p)^j) = \left(\sum f_j^p j (x_1^p)^{j-1}\right) d(x_1^p),$$
$$D(f)^p = \sum f_j^p D(x_1^j)^p = \left(\sum f_j^p j^p (x_1^{j-1})^p\right) D(x_1)^p$$

となり，2 つの大きな括弧の中身は等しいので $\frac{d(f^p)}{D(f)^p} = \frac{d(x_1^p)}{D(x_1)^p}$ を得る．また，Ω^1_X と $\mathcal{O}_X$ での等式

$$df = \sum x_1^j df_j + \sum f_j d(x_1^j),$$
$$D(f) = \sum x_1^j D(f_j) + \sum f_j D(x_1^j)$$

において $df_j \in \mathrm{Im}(\pi^*)$，$D(f_j) = 0$ なので，上と同じ議論で，$\mathrm{Coker}(\pi^*)$ の切断として $\frac{df}{D(f)} = \frac{dx_1}{D(x_1)}$ である． $\square$

補題 4.6. 局所自由層からなる短完全列

$$0 \to G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \to 0$$

に対して，可逆層の同型射

$$\det(G_1) \otimes \det(G_3) \cong \det(G_2) \colon \quad g_1 \otimes \phi_2(g_2) \mapsto \phi_1(g_1) \wedge g_2$$

がある[*8]．ただし局所自由層 G に対してその最高次外積を $\det(G) := \bigwedge^{\operatorname{rank} G} G$ と書く（これは可逆層である）．

もっと長い完全列に対しても同様のことが成り立つ．例えば

$$0 \to G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \xrightarrow{\phi_3} G_4 \to 0$$

に対して同型

$$\det(G_1) \otimes \det(G_3) \cong \det(G_2) \otimes \det(G_4)$$

がある． ◊

証明. 射が同型であることは，X を縮めて各 G_i が自由で短完全列が分裂する場合に示せばよく，この場合明らかである．

長い完全列は，短完全列に分解して各々に前半を適用すればよい（局所自由層の間の射の核はまた局所自由である）． □

命題 4.2 の証明. 補題 4.6（長さ 4 の場合）を補題 4.5 の完全列に適用して求める同型を得る．具体的表示も構成から分かる． □

4.3 大域（有理）ベクトル場の数値的性質

次の定理はある仮定の下では Rudakov–Shafarevich [RS76, Theorem 3] により，一般の場合は Katsura–Takeda [KT89, Proposition 2.1] により示された．

定理 4.7. X を固有滑らかな曲面とし，$D \neq 0$ を有理ベクトル場とすると，

$$\deg c_2(X) = \deg\langle D\rangle - K_X \cdot (D) - (D)^2$$

が成り立つ． ◊

ただし $c_2(X) := c_2(\Theta_X)$ は X の第 2 Chern 類であり，その次数 $\deg c_2(X)$ は整数である．

なお Chern 類の解説は省略する．詳しくは例えば [Ful84, Chapters 2, 3, 15, etc.] を見よ．または [桂 22, 3.4 節] にはこの定理の証明を追うのに必要な事実が載っている．

証明. 完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X((D)) \xrightarrow{\cdot D} \Theta_X \xrightarrow{\wedge D} (\bigwedge^2 \Theta_X) \otimes \mathcal{O}_X(-(D)) \to \mathcal{S} \to 0$$

[*8] 本当はこの右辺の外積をどちらの順番にするかきちんと考えないと，可換なはずの図式が可換の -1 倍になって大変なことになったりするのだが，本稿の範囲では -1 倍ずれてもとくに影響がないのできちんと考えていない．

において $\mathcal{S}$ は $\dim \operatorname{Supp} \mathcal{S} \leq 0$（$\operatorname{Supp} \mathcal{S} = \emptyset$ の場合を含む）および $\deg \mathcal{S} = \deg\langle D \rangle$ を満たす．ただし 1 つめの射は $a \mapsto aD$，2 つめの射は $D' \mapsto D' \wedge D$ である．（第 2）Chern 類を計算（詳細略）すると所望の等式を得る．□

曲面上の有理 1 次微分形式についても同様の公式が存在し，こちらは井草の公式とよばれることもある．

定理 4.8. X は固有滑らかな曲面とし，$\eta \neq 0$ を有理 1 次微分形式とすると，

$$\deg c_2(X) = \deg\langle \eta \rangle + K_X \cdot (\eta) - (\eta)^2$$

が成り立つ．◊

$\langle \eta \rangle$ および (η) はベクトル場の場合と同様に定める（3.1 節の冒頭参照）．

有理 2 次微分形式 ω を 1 つ固定すると，有理 1 次微分形式 η と有理ベクトル場 D の間の一対一対応で $D(f)\omega = df \wedge \eta$ を満たすものが定まり，この対応の下で $\langle \eta \rangle = \langle D \rangle$，$(\eta) = (D) + K_X$ が成り立つので，定理 4.7 と定理 4.8 の一方を示せばもう一方は直ちに従う．

4.4 ベクトル場の作用の例

5.5 節で見るように，X のベクトル場全体の空間 $H^0(X, \Theta_X)$ は X の自己同型群スキーム $\mathcal{A}ut(X)$ の Lie 環（原点での接空間）に一致する（X が射影的ならば）．

例 4.9 (射影空間の場合)**.** $X = \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n]$ を射影空間とすると，$\operatorname{Aut}(X) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(k) = \mathrm{GL}_{n+1}(k)/k^*$ であり，自己同型群スキームは $\mathcal{A}ut(X) = \mathrm{PGL}_{n+1}$ であり，$H^0(X, \Theta_X) = \operatorname{Lie} \mathrm{PGL}_{n+1} = \mathfrak{pgl}_{n+1}(k) = \mathfrak{gl}_{n+1}(k)/k$ である（分母の k^*，k はスカラー行列を意味する）．行列単位 E_{ij}（の $\mathfrak{pgl}$ での剰余類）に対応するベクトル場は $x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ である[*9*10]．◊

例 4.10 (アーベル多様体の場合)**.** A を g 次元アーベル多様体とする．A の（原点を保つと限らない）自己同型群の単位連結成分は A 自身（による平行移動）なので，$H^0(A, \Theta_A) \cong \Theta_{A,0} \otimes k$（原点での接空間）になる．標数 $p > 0$ のとき，この restricted Lie algebra（5.6 節）の p 乗写像に関する半単純部分（命題 5.34 参照）の次元が A の p-rank に一致する [Mum70, Sections 14–15][*11]．すなわち，この場合ベクトル場は多様体の正標数特有の性質をある程度反映している．◊

例 4.11 (曲線の場合)**.** C を種数 g の曲線とする．$g = 0$ ならば $C \cong \mathbb{P}^1$ なので，例 4.9 より $H^0(C, \Theta_C) \cong \mathfrak{pgl}_2(k)$ である．$g = 1$ ならば，（原点 0 を選択することで）楕円曲線すなわち 1 次元アーベル多様体になるので，例 4.10 より $H^0(C, \Theta_C) \cong \Theta_{C,0} \otimes k$ は 1 次元である．

一般に，$\Theta_C \cong (\Omega^1_C)^\vee$ の次数は $2 - 2g$ で，$g \geq 2$ のとき $\deg \Theta_C < 0$ なので $H^0(C, \Theta_C) = 0$ となる．◊

---

*9 i と j が逆だったらすみません．

*10 $x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ は次数つき環 $B = k[x_0, \dots, x_n]$ の次数を保つ導分なので，$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} B$ の導分を誘導する．$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ は m 次部分に m 倍で作用するので斉次局所化の 0 次部分には 0 で作用する，すなわち $\operatorname{Proj} B$ の導分としては 0 である．

*11 A の p 倍写像の核 $A[p]$ は（被約でない）部分群スキームになり，$A[p]_{\mathrm{red}}$ の位数はある $0 \leq i \leq g$ に対する p^i になることが知られている．この i を A の p-rank とよぶ．

4.5 小平次元との関係

多様体の基本的な不変量として小平次元がある．いくつかの同値な定義がある．同値性の確認は省略する．適当な代数幾何学の教科書（例えば [Iit82]，[Uen75]）を見よ[*12]．

定義 4.12 (小平次元)**.** X を滑らかな射影多様体とし，K_X を標準因子とする．X の**多重種数** (*plurigenus*) を $P_d = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(dK_X))$（$d \geq 0$）で定める．

$P_1 = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))$ は**幾何種数** (*geometric genus*) とよばれ p_g とも書かれる．1 次元の種数の一般化の一つである．

すべての $d \geq 0$ で $P_d = 0$ であるとき $\kappa = -\infty$ と定め，そうでないとき $\kappa \in \{0, 1, \ldots, \dim X\}$ を次の同値な条件で定める．κ を X の**小平次元** (*Kodaira dimension*) とよび $\kappa(X)$，$\mathrm{kod}(X)$ などと書く．

- 線形系 $|dK_X|$ の像の次元の最大値が κ.
- X の**標準環** (*canonical ring*) $\bigoplus_{d \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(dK_X))$ の k 上の超越次元が $\kappa + 1$.
- κ は $P_d = O(d^\kappa)$（Landau の O 記法，すなわち $\frac{P_d}{d^\kappa}$ が上に有界）を満たす最小の κ.
- ある $d_0 > 0$ に対して次が成立する：$0 < a < b < +\infty$ が存在して，d_0 の任意の倍数 $d > 0$ に対し $a < \frac{P_d}{d^\kappa} < b$. ◊

注 4.13. 最後の条件は d_0 として 1 をとると（つまり d に制限をつけないと）一般に成立しない．例えば X が標数 $\neq 2$ の Enriques 曲面ならば，$K_X \not\sim 0$ かつ $2K_X \sim 0$ なので，d の偶奇に応じて $P_d = 1, 0$ となり，$\kappa = 0$ であり $\frac{P_d}{d^\kappa}$ も $1, 0$ である．この場合は $d_0 := 2$ ととればよい． ◊

例 4.14. X が射影空間ならば $-K_X$ が豊富なので任意の $d > 0$ で $P_d = 0$ であり，$\mathrm{kod}(X) = -\infty$ である．

$K_X \sim 0$（例えば X がアーベル多様体や K3 曲面）ならば任意の $d > 0$ で $P_d = 1$ であり，$\mathrm{kod}(X) = 0$ である．

C が種数 g の曲線の場合，$g = 0$，$g = 1$，$g \geq 2$ に応じて $\mathrm{kod}(C) = -\infty, 0, 1$ である． ◊

ベクトル場やそれによる商との関係について少し述べる．

例 4.15. $r := \mathrm{rank}\,\mathrm{Im}(H^0(X, \Theta_X) \otimes \mathcal{O}_X \to \Theta_X)$ とおく．$r = n := \dim X$ ならば，$k(X)$ 上 1 次独立な $D_1, \ldots, D_n \in H^0(X, \Theta_X)$ をとると $D_1 \wedge \cdots \wedge D_n \neq 0$ は $\bigwedge^n \Theta_X \cong (\Omega_X^n)^\vee \cong \mathcal{O}(-K_X)$ の大域切断であり，したがって $-K_X \geq 0$，とくに $\mathrm{kod}(X) \leq 0$ である．対偶をとって，小平次元が 1 以上ならば $r < n$ であることが分かり，そのとき $\dim H^0(X, \Theta_X)$ は “あまり大きくない” ことが想像できる． ◊

例 4.16. X が**一般型** (*of general type*)（すなわち $\mathrm{kod}(X) = \dim X$）だとする．このとき $\mathrm{Aut}(X)$ は有限群であり [Mat63][*13]，したがって標数 0 ならば（注 5.13 の議論とあわせて）$H^0(X, \Theta_X) = 0$ である．一方で，正標数ならば一般型でも $H^0(X, \Theta_X) \neq 0$ となりうる． ◊

例 4.17. $\pi \colon X \to Y$ が正則ベクトル場 D による商だとすると，Rudakov–Shafarevich 公式 $K_X \sim \pi^* K_Y + (p-1)D$ より，$P_d(X) \geq P_d(Y)$ なので，$\mathrm{kod}(X) \geq \mathrm{kod}(Y)$ である． ◊

[*12] ※読まないで言ってます．

[*13] ※読まないで言ってます．

5　群スキームと作用と商

乗法型・加法型ベクトル場と群スキーム μ_p・α_p の作用の対応について述べたい．スキーム S 上の**群スキーム** (*group scheme*) とは，S スキームの圏 Sch/S の群対象である．というわけでまず一般的な設定で群対象や作用を定義する．

5.1　群対象

$\mathcal{C}$ を有限個の対象の積をもつ圏とする（したがって，0 個の対象の積すなわち終対象ももつ）．例えば，集合の圏 Sets や S スキームの圏 Sch/S は条件を満たす．終対象を S とおく．例えば集合の圏の場合 S は 1 点集合である．

定義 5.1 (群対象)**.** $\mathcal{C}$ の対象 G および射 $m\colon G\times G\to G$, $e\colon S\to G$, $i\colon G\to G$ からなる 4 つ組 (G,m,e,i) が下記の条件（図式の可換性）を満たすとき**群対象** (*group object*) という．$\mathcal{C}=\mathrm{Sch}/S$ のときは S 上の**群スキーム** (*group scheme*) という．

(1) 結合法則：

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times m"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G. \end{tikzcd}$$

(2) 単位元：

$$\begin{tikzcd} G\times S \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times e"'] & G \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] & S\times G \arrow[d, "e\times\mathrm{id}_G"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G & G\times G. \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

(3) 逆元：

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[dd, "\mathrm{id}_G\times i"'] & G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & G\times G \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}_G"] \\ & S \arrow[d, "e"] & \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G & G\times G. \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

ただし $\Delta=(\mathrm{id}_G,\mathrm{id}_G)\colon G\to G\times G$ は対角射．　◊

命題 5.2. G を $\mathcal{C}$ の群対象とする．各対象 $c\in\mathcal{C}$ に対し，集合 $G(c):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,G)$, 写像 $m(c)\colon (G\times G)(c)=G(c)\times G(c)\to G(c)$, $e(c)\colon S(c)=\{\mathrm{pt}\}\to G(c)$, $i(c)\colon G(c)\to G(c)$ は群をなす（$m(c)$ が乗法，$e(c)$（の像）が単位元，$i(c)$ が逆元（を与える写像））．定義 5.1 の各条件が通常の群の公理に対応する．さらに，各射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$ に対し，写像 $f^*\colon G(c')\to G(c)$ は群準同型になる．

したがって，関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Sets}\colon c\mapsto G(c)$ は群の圏を経由する．　◊

証明は容易である．

定義 5.3 (群対象の作用)**.** G を $\mathcal{C}$ の群対象とし，X を $\mathcal{C}$ の対象とする．射 $a\colon G\times X\to X$ が下記の条件（図式の可換性）を満たすとき**作用** (*action*) という．

(1) 結合法則のようなもの：

$$\begin{CD} G\times G\times X @>{m\times \mathrm{id}_X}>> G\times X \\ @V{\mathrm{id}_G\times a}VV @VV{a}V \\ G\times X @>>{a}> X. \end{CD}$$

(2) 単位元の作用が自明なこと：

$$\begin{CD} X @>{\sim}>> S\times X \\ @V{\mathrm{id}_X}VV @VV{e\times \mathrm{id}_X}V \\ X @<<{a}< G\times X. \end{CD}$$

$\Diamond$

命題 5.4. $a\colon G\times X\to X$ を群対象 G の対象 X への作用とする．命題 5.2 と同様に，各対象 $c\in\mathcal{C}$ に対し，$a(c)\colon (G\times X)(c)=G(c)\times X(c)\to X(c)$ は群の集合への作用であり，各射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$ と整合的である． $\Diamond$

証明は容易である．

注 5.5. $\mathcal{C}$ が集合の圏 Sets の場合，群対象およびその作用とは通常の意味の群およびその作用に他ならない．以下に述べる準同型，核，商についても同様である． $\Diamond$

定義 5.6. 群対象の間の射 $f\colon G_1\to G_2$ が準同型であるとは，図式

$$\begin{CD} G_1\times G_1 @>{m_1}>> G_1 \\ @V{f\times f}VV @VV{f}V \\ G_2\times G_2 @>>{m_2}> G_2, \end{CD}\qquad \begin{CD} S @>{e_1}>> G_1 \\ @| @VV{f}V \\ S @>>{e_2}> G_2, \end{CD}\qquad \begin{CD} G_1 @>{i_1}>> G_1 \\ @V{f}VV @VV{f}V \\ G_2 @>>{i_2}> G_2 \end{CD}$$

が可換であることをいう． $\Diamond$

補題 5.7. m に関する図式の可換性から他の 2 つの図式の可換性が従う． $\Diamond$

略証．命題 5.2 より，各 $c\in\mathcal{C}$ に対する群 $G_1(c)$，$G_2(c)$ の間の写像に関する命題に帰着されるが，群の間の積を保つ写像が単位元と逆元を保つことは簡単に確認できる． $\square$

定義 5.8. $\mathcal{C}$ がファイバー積をもつと仮定する．群対象の間の準同型 $G_1\to G_2$ の**核** (*kernel*) とは，$G_1\to G_2$ と $S\to G_2$ のファイバー積である．ただし S は自明な群対象である． $\Diamond$

注 5.9. 像の定義はどうすればいいのかよく知らない．

ところで，（位相空間の開集合に対する）層の準同型 $G_1\to G_2$ の像については，単純に関手（＝前層）$c\mapsto \mathrm{Im}(G_1(c)\to G_2(c))$ を考えると層にならず，この前層を層化することで層の圏での像の普遍性を満たすのだった．

S スキームの圏の場合，表現可能関手（Y を対象として，Y が定める関手 $\mathrm{Sch}/S\to \mathsf{Sets}\colon c\mapsto Y(c)=\mathrm{Hom}(c,Y)$ に同型なもの）は fppf 位相に関して層をなす[*14]．というわけで，fppf 層化をとるのがよいので

[*14] なお fppf 位相は通常の意味の位相（集合とその上の開集合系という意味）ではなく Grothendieck 位相であるが，これをよく知

しょうか？ $\diamondsuit$

定義 5.10 (商)**.** $G \curvearrowright X$ が群対象の作用のとき，作用による X の**商** (*quotient*) とは，$G \times X \overset{a}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} X$ の coequalizer である．すなわち，$\pi\colon X \to Y$ が商であるとは，$\pi \circ a = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ を満たし，かつ，任意の対象 Z に対して $\mathrm{Hom}(Y, Z) \xrightarrow{-\circ\pi} \{f \in \mathrm{Hom}(X, Z) \mid f \circ a = f \circ \mathrm{pr}_2\}$ が全単射になるものである． $\diamondsuit$

5.2 群スキームの例

例 5.11. 有限群 $G = (G, m, e, i)$ に対し定数群スキーム $\underline{G} = (\underline{G}, \underline{m}, \underline{e}, \underline{i})$ を次のように定める．スキームとしては $\coprod_{g \in G} S$ とする．$\underline{G}$ の群構造を定める各射は，G の群構造を定める各射から自然に定める：例えば $\underline{m}\colon \underline{G} \times \underline{G} = \coprod_{g_1, g_2 \in G} S \to \underline{G} = \coprod_{h \in G} S$ は，(g_1, g_2) 番目の S から $m(g_1, g_2)$ 番目の S に送ることで定める（m は群 G の乗法 $m\colon G \times G \to G$）．$\underline{G}$ のスキーム X への作用は，群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ と自然に対応する．しばしば $\underline{G}$ のことを単に G と書く．

定数群スキーム $\underline{G}$ のスキーム X への作用は群 G の作用と同じことである：$a\colon \underline{G} \times X \to X$ が前者の作用のとき，$g \in G$ の後者の作用は $X \xrightarrow{\sim} \{g\} \times X \hookrightarrow \underline{G} \times X \xrightarrow{a} X$ である． $\diamondsuit$

以下基礎スキームは $S = \operatorname{Spec} k$（$k$ は代数閉体）とする．5.2–5.3 節の間は標数は任意である．また，アフィンスキームの射 f に対応する環の射を $f^{\#}$ で表す．

定義 5.12. 群スキーム $G \to \operatorname{Spec} k$ がスキームの射として有限のとき G を**有限群スキーム** (*finite group scheme*) という． $\diamondsuit$

注 5.13. k の標数が 0 ならば群スキームはすべて滑らかであることが知られており（[Mum70, Theorem in Section 11]），とくに有限群スキームはすべて例 5.11 の形のものである．一方標数 p では，α_p や μ_p など被約でない有限群スキームがたくさん存在する．

系として，$\operatorname{char} k = 0$ で $\mathrm{Aut}(X)$ が離散的ならば $H^0(X, \Theta_X) = 0$ だが（cf. 例 4.16），正標数ではそうとは限らない． $\diamondsuit$

例 5.14 ($\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$, α_p)**.** 加法群スキーム $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ は，スキーム $\operatorname{Spec} k[t]$ に，群演算を $m^{\#}(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$, $e^{\#}(t) = 0$, $i^{\#}(t) = -t$ で定めたものである．群 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(\operatorname{Spec} A)$ は加法群 A に他ならない．$p := \operatorname{char} k > 0$ ならば，フロベニウス写像 $F\colon \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$（$F^{\#}(t) = t^p$）は自己準同型であり，その核 $\alpha_p = \operatorname{Spec} k[t]/(t^p)$ は被約でない有限部分群スキームである． $\diamondsuit$

例 5.15 ($\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, μ_p)**.** 乗法群スキーム $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ は，スキーム $\operatorname{Spec} k[u, u^{-1}]$ に，群演算を $m^{\#}(u) = u \otimes u$, $e^{\#}(u) = 1$, $i^{\#}(u) = u^{-1}$ で定めたものである．群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\operatorname{Spec} A)$ は乗法群 A^* に他ならない．正整数 n に対し，n 乗写像 $[n]\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$（$[n]^{\#}(u) = u^n$）は自己準同型であり，その核 $\mu_n = \operatorname{Spec} k[u]/(u^n - 1)$ は有限部分群スキームである．

n が標数と素ならば，μ_n は定数群スキーム $\underline{\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}}$ に同型である．同型射をとることは k での 1 の原始 n 乗根をとることに対応する．一方で n が標数 p で割れるならば，$u^n - 1 = (u^{n/p} - 1)^p$ なので μ_n は被約でない． $\diamondsuit$

らない読者はとりあえず Zariski 位相に関して層をなす（すなわち，スキーム X とその Zariski 開集合からなる被覆 $\{U_i\}$ を代入した例の列が完全である）ことを確認されたい．

なお，μ_p と α_p は k スキームしては同型だが群スキームとしては同型でない．

5.3 群スキームの作用による商

一般的な設定での商は定義 5.10 で定義した．群スキームの場合の商の存在・構成については命題 5.16 と命題 5.18 が基本的である．

命題 5.16. $G = \operatorname{Spec} A$ が有限群スキームで．アフィンスキーム $\operatorname{Spec} R$ に作用しているとする（すなわち，$a\colon \operatorname{Spec}(A \otimes R) \to \operatorname{Spec} R$ が定義 5.3 で述べた条件を満たす）．作用による R の不変部分環 R^G を，$R^G := \{r \in R \mid a^{\#}(r) = 1 \otimes r\}$ とおくと，$\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} R^G$ がこの作用による（定義 5.10 の意味での）商である． $\diamondsuit$

例 5.17. 有限群 G が定める定数群スキーム $\underline{G}$（例 5.11）の場合，$\operatorname{Spec} R$ への作用とは環 R への（右）作用のことであり，不変部分環は群の環への作用で不変な元からなる部分環に一致する．実際，$A = \prod_{g \in G} k$ の標準基底を e_g とおくと，$a^{\#}(r) = \sum_g e_g \otimes g(r)$ である一方，$1_A = \sum_g e_g$ なので $1_A \otimes r = \sum_g e_g \otimes r$ である． $\diamondsuit$

命題 5.18. G が有限群スキームで，スキーム X に作用し，X は G 安定なアフィン開部分スキームで覆われると仮定する．このとき商 $\pi\colon X \to X/G$ は存在し，$U = \operatorname{Spec} R \subset X$ が G 安定なアフィン開部分スキームのとき $\pi(U) = \operatorname{Spec} R^G$ であり，X/G はこのようなアフィンスキームで覆われる． $\diamondsuit$

注 5.19. G がただの有限群であっても，$G = \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ の場合ですら，X が G 安定なアフィン開集合で覆われないことがありうる．広中の反例[*15]が有名である． $\diamondsuit$

注 5.20. 有限でない群スキーム G の作用については，上述の商（categorical quotient とよばれる）とは別の定義の geometric quotient や GIT quotient も重要らしいが，本稿では触れない． $\diamondsuit$

5.4 群スキーム μ_p, α_p とその作用の記述

この小節に限り，X は整と限らない任意の k スキームとする．

μ_p，α_p の定義は例 5.15，5.14 で与えたが，再掲する．

定義 5.21 (μ_p)**.** $G = \operatorname{Spec} A$，$A = k[u]/(u^p - 1)$，$m^{\#}\colon A \to A \otimes A\colon u \mapsto u \otimes u$，$e^{\#}\colon A \to k\colon u \mapsto 1$，$i^{\#}\colon A \to A\colon u \mapsto u^{-1}$． $\diamondsuit$

定義 5.22 (α_p)**.** $G = \operatorname{Spec} A$，$A = k[t]/(t^p)$，$m^{\#}\colon A \to A \otimes A\colon t \mapsto t \otimes 1 + 1 \otimes t$，$e^{\#}\colon A \to k\colon t \mapsto 0$，$i^{\#}\colon A \to A\colon t \mapsto -t$． $\diamondsuit$

μ_p および α_p のスキーム X への作用はベクトル場と対応する．

命題 5.23. X を k 上のスキームとする．μ_p（resp. α_p）の X への作用は，X 上の乗法的（resp. 加法的）ベクトル場と一対一に対応する．商も一致する． $\diamondsuit$

5.5 節で述べる一般の群スキームに対する事実（定理 5.29，例 5.30）からも従うが，まず μ_p, α_p の場合に

[*15] [Har77, Example B.3.4.1] の状況で 2 曲線・2 点をそれぞれ入れ替える $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 作用をもってくればよい．

絞って具体的な対応を説明する．

$G=\mu_p$ または $G=\alpha_p$ のとき，G の底位相空間は 1 点集合なので，G がスキーム X へ作用しているとき，任意の開部分スキームは G 安定である．とくに，G 安定なアフィンスキームからなる開被覆をとれる[*16]．したがってアフィンスキームへの作用を考えれば十分である．よって，命題 5.23 は命題 5.24（の $n=p$ の場合）と命題 5.26 から従う．

命題 5.24. $n\geq 1$ を正整数とし（n は標数で割れても割れなくてもよい），R を k 代数とする．次の対象全体の集合の間に一対一対応がある（具体的な対応は証明で述べる）．

- R の $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ 次数付き代数構造．すなわち，k 加群としての直和分解 $R=\bigoplus_{i\in\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}}R_i$ であって，$1\in R_0$ および $R_iR_j\subset R_{i+j}$ を満たすもの．
- μ_n の $\operatorname{Spec}R$ への作用．
- 【$n=p:=\operatorname{char}k>0$ のとき】R 上の乗法型 k-導分，すなわち，$D\in\operatorname{Der}_k(R)$ であって $D^p=D$ を満たすもの．

さらに，作用による商スキームは $\operatorname{Spec}R_0$ に一致する．$n=p$ のときは $R_0=R^D:=\{r\in R\mid D(r)=0\}$ である． ♢

証明. 作用を $a^\#\colon R\to A\otimes R\colon r\mapsto\sum_{i\in\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}}u^i\otimes\delta_i(r)$ と書くと, n 個の k 加群の準同型 $(\delta_i\colon R\to R)_{i\in\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}}$ が得られるが，$a^\#$ が k 代数の射になるための条件は (1)(2) であり，作用になるための条件は (3)(4) である．

(1) $\delta_0(1)=1$，$\delta_i(1)=0$（$i\neq 0$）．
(2) $\delta_i(rs)=\sum_{j+j'=i}\delta_j(r)\delta_{j'}(s)$（ただし添字は $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ をわたる）．
(3) $\delta_i\circ\delta_i=\delta_i$，$\delta_i\circ\delta_j=0$（$i\neq j$）．
(4) $\sum_{i\in\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}}\delta_i=\mathrm{id}$.

k 加群の準同型 $(\delta_i)\colon R\to\bigoplus_{i\in\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}}\operatorname{Im}(\delta_i)$ を考えると，これが直和分解（の各直和成分への射影）を与えるための条件が (3)(4) であり，次数付き代数構造になるための条件は (1)(2) である．

$n=p=\operatorname{char}k>0$ のとき，$D:=\sum_{i\in\boldsymbol{F}_p}i\delta_i\colon R\to R$ は (1)(2) より乗法型導分で，(3) より $D^p=D$ を満たし，その（k 線形写像としての）固有値は $\boldsymbol{F}_p$ に含まれ，$\operatorname{Im}(\delta_i)\subset R^{D=i}$ であり，(4) よりこれらは等号が成り立つ．また $f_i(T):=\frac{T^p-T}{T-i}\in\boldsymbol{F}_p[T]$ とおくと，$\frac{f_i(D)}{f_i(i)}=\delta_i$ である．逆に D からこの式で δ_i を得る．

商については容易． □

系 5.25. k 代数 R の $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 次数付き代数構造と乗法型導分 D が対応しているとき，$\operatorname{Im}(D)$ が生成するイデアルは部分 k ベクトル空間 $\bigoplus_{i\neq 0}R_i$ が生成するイデアルに等しい． ♢

証明. $R_i=\operatorname{Im}(\delta_i)$ である．イデアル $(\operatorname{Im}(D))$ と $(\sum_{i\neq 0}\operatorname{Im}(\delta_i))$ の間の両方向の包含関係が，それぞれ $D=\sum_{i\in\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}}i\cdot\delta_i$ と $\delta_i=\frac{f_i(D)}{f_i(i)}$（$f_i(T)$ は $i\neq 0$ のとき T で割りきれる）から従う． □

命題 5.26. R を k 代数とする．次の対象全体の集合の間に一対一対応がある（具体的な対応は証明で述べる）．

- α_p の $\operatorname{Spec}R$ への作用．

[*16] 一般の有限群スキーム G の作用は必ずしもこの性質を満たさない．cf. 注 5.19.

- R 上の加法型 k-導分，すなわち，$D \in \mathrm{Der}_k(R)$ であって $D^p = 0$ を満たすもの．

さらに，作用による商スキームは $\operatorname{Spec} R^D$（$R^D := \{r \in R \mid D(r) = 0\}$）に一致する． $\Diamond$

証明. 作用を $a^\#\colon R \to A \otimes R\colon r \mapsto \sum_{i \in \{0,\dots,p-1\}} t^i \otimes \delta_i(r)$ と書くと，p 個の k 加群の準同型 $(\delta_i\colon R \to R)_{i \in \{0,\dots,p-1\}}$ が得られるが，$a^\#$ が k 代数の準同型になるための条件は (1)(2) であり，作用になるための条件は (3)(4) である．

(1) $\delta_0(1) = 1$，$\delta_i(1) = 0$（$i \neq 0$）．
(2) $\delta_i(rs) = \sum_{j+j'=i} \delta_j(r)\delta_{j'}(s)$（ただし添字は $\{0,\dots,p-1\} \subset \boldsymbol{Z}$ をわたる）．
(3) $\delta_j \circ \delta_{j'} = \frac{(j+j')!}{j!j'!}\delta_{j+j'}$．
(4) $\delta_0 = \mathrm{id}$．

このとき δ_1 は k-導分であり，$\delta_i = \frac{(\delta_1)^i}{i!}$，$(\delta_1)^p = 0$ を満たすことが分かる．逆も同様．
商については容易． $\square$

命題 5.23 より，X が μ_p または α_p の非自明な作用をもつならば，$H^0(X, \Theta_X) \neq 0$ である．逆はどうかというと，命題 5.33 から次が成り立つ．

命題 5.27. $H^0(X, \Theta_X)$ が有限次元かつ $\neq 0$ ならば，$D^p = D$ または $D^p = 0$ を満たす $D \in H^0(X, \Theta_X) \setminus \{0\}$ が存在する．すなわち，X は μ_p または α_p の非自明な作用をもつ． $\Diamond$

なお，例えば X が固有ならば $H^0(X, \Theta_X)$ は有限次元である．

注 5.28. 命題 5.27 で $H^0(X, \Theta_X)$ が無限次元だったらどうなるのかは知りません．ご存じの方は教えてください． $\Diamond$

5.5 自己同型群スキームとその接空間

本小節で k 上のスキームのことを単にスキームという．スキームの射や群スキームについても同様にする．

スキーム X に対し，$\mathcal{A}ut(X)$ とは[*17]，スキームの圏から群の圏への反変関手 $T \mapsto \mathrm{Aut}(X \times T)$ である．スキームで表現可能なとき，そのスキームのことも $\mathcal{A}ut(X)$ と書き，X の**自己同型群スキーム** (*automorphism group scheme*) とよぶ．（スキーム Y が**表現** (*represent*) する関手とは $T \mapsto Y(T) = \mathrm{Hom}(T, Y)$ であり，そのような関手と同型な関手を表現可能であるという．）

X が（k 上）射影的ならば自己同型群スキームは存在し（すなわちこの関手が表現可能であり），$X \times X$ の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}(X \times X)$ の部分スキームになる（[Nit05, Exercise in Section 5.6.2][*18]）．

群関手の射 $G \to \mathcal{A}ut(X)$（後者がスキームならば群スキームの射でもある）とは G の X への作用に他ならない．

$\Lambda := k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ とし $\iota\colon \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} \Lambda$ を $\iota^\#(\varepsilon) = 0$ で定める．スキーム（または一般にスキームの圏から Sets への関手）Z に対し，元 $\vec{y} \in Z(\Lambda) = \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} \Lambda, Z)$ を $y := \iota^*(\vec{y}) \in Z(k)$ での**接ベクトル** (*tangent vector*) とよび，その全体 $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} \Lambda, Z)$ を Z の y での**接空間** (*tangent space*) とよぶ．

[*17] 立体（この場合 Aut）で表される集合を値にとる関手やそれを表現する対象を斜体や下線付きで表すというよくある記法の一環．
[*18] see also: `https://mathoverflow.net/questions/55042/automorphism-group-of-a-scheme`

$\mathcal{A}ut(X)$ の単位元での接空間は $H^0(X, \Theta_X)$ に自然に対応する：単位元での接ベクトルとは $\phi\colon \operatorname{Spec}\Lambda \to \mathcal{A}ut(X)$ すなわち $\phi \in \operatorname{Aut}(X \times \operatorname{Spec}\Lambda)$（such that $\phi \circ \iota = \mathrm{id}_X \in \mathcal{A}ut(X)(k) = \operatorname{Aut}(X)$）であり，$\phi^\# \in \operatorname{Aut}(\mathcal{O}_X \otimes \Lambda)$（such that $\phi^\# \otimes k = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$）であり，対応 $\phi^\#(r_0 + r_1\varepsilon) = r_0 + (D(r_0) + r_1)\varepsilon$ によりベクトル場 $D \in H^0(X, \Theta_X)$ に対応する．

定理 5.29. S をスキームとする．$\mathcal{O}_S$ 加群 L で括弧積と p 乗写像という 2 つの演算が定まり所定の条件（5.6 節参照）を満たすものを（S 上の）*restricted Lie algebra* という．L が階数有限の局所自由層のとき S 上の群スキーム $G_p(L)$ が定まる．このとき，S スキーム X に対し，

$$\operatorname{Hom}(G_p(L), \mathcal{A}ut(X)) \to \operatorname{Hom}(L, \operatorname{Lie}\mathcal{A}ut(X))$$

は全単射である（[SGA3-1, Théorème VII.7.2(ii)]）．ただし $\mathcal{A}ut(X)$ は前述の群関手，左辺は S 上の群関手の射全体（$\mathcal{A}ut(X)$ がスキームならば群スキームの射全体と同じ），右辺は restricted Lie algebra の射全体である．また $\operatorname{Lie}\mathcal{A}ut(X) = H^0(X, \Theta_X)$ である． $\Diamond$

例 5.30. $S = \operatorname{Spec} k$ とする．

$L = k \cdot x$（階数 1 自由加群）で $[x, x] = 0$，$x^{(p)} = x$ のとき $G_p(L) = \mu_p$ であり，定理 5.29 の全単射の右辺は $\{D \in H^0(X, \Theta_X) \mid D^p = D\}$ すなわち乗法型のベクトル場全体になる．

$L = k \cdot x$（階数 1 自由加群）で $[x, x] = 0$，$x^{(p)} = 0$ のとき $G_p(L) = \alpha_p$ であり，定理 5.29 の全単射の右辺は $\{D \in H^0(X, \Theta_X) \mid D^p = 0\}$ すなわち加法型のベクトル場全体になる． $\Diamond$

5.6 restricted Lie algebra

定義 5.31. k ベクトル空間 V と双線形写像 $[-,-]\colon V \times V \to V$ が

- $[x, x] = 0$,
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

を満たすとき Lie 環とよぶ.

V が Lie 環で，さらに写像 $-^{[p]}\colon V \to V$ が

- $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$ $(\lambda \in k)$,
- $\operatorname{ad}(x^{[p]}) = \operatorname{ad}(x)^p$（右辺は写像の合成，$\operatorname{ad}(x) = [x, -]$），
- $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum F_p(\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y))y$

を満たすとき，*restricted Lie algebra* とよばれる[*19]．最後の条件の右辺の F_p は標数 p のみに依存するある $p-1$ 次の非可換多項式である[*20]． $\Diamond$

例 5.32. 結合的な（単位的と限らず可換と限らない）k 代数には，$[x, y] := xy - yx$ と $x^{[p]} := x^p$ により restricted Lie algebra の構造が入る．

例えば行列環 $M_n(k)$ はこれにより restricted Lie algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$ になる．

[*19] 和訳があったら教えてください．

[*20] 具体的には，$\operatorname{ad}(x+y)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y)$，$f_i$ は 2 つの変数について $(i, p-1-i)$ 次，としたとき，$F_p = \sum_{i=1}^{p-1} -i^{-1} f_i$ である．これだけ見ると謎の条件だが，例 5.32 から自然に要請される．

また k 線形自己準同型の層 $\mathcal{E}nd_k(\mathcal{O}_X)$ も写像の合成から restricted Lie algebra 構造が定まる．部分ベクトル空間 $\Theta_X \subset \mathcal{E}nd_k(\mathcal{O}_X)$ は前述のように演算 $[-,-], -^{[p]}$ で閉じているので，部分 restricted Lie algebra の構造が入る． $\Diamond$

命題 5.33. V は restricted Lie algebra で，k 上有限次元かつ $\neq 0$ だとする．このとき $x^{[p]} = x$ または $x^{[p]} = 0$ を満たす元 $x \in V \setminus \{0\}$ が存在する． $\Diamond$

証明. $\mathrm{ad}(x^{[p]}) = \mathrm{ad}(x)^p$ から，任意の非負整数 m, n に対して $[x^{[p]^m}, x^{[p]^n}] = 0$ である．

（以下の証明は [RS76, Lemma 1 in Section 1] による．）0 でない元 $w \in V$ をとり，$w, w^{[p]}, w^{[p]^2}, \dots$ が生成する k 部分ベクトル空間 $W \subset V$ を考えると，上述の性質から W 上では括弧積は自明であり，また W は p 乗写像で閉じている．括弧積が自明なことから，p 乗写像 $W \xrightarrow{[p]} W$ は半線形写像（加法的かつ，$(cv)^{[p]} = c^p v^{[p]}$）であり，k ベクトル空間構造をひねると，$W \xrightarrow{[p]} W \to W \otimes_{k,\sigma^{-1}} k$ （σ はフロベニウス写像）は W から自分自身への線形写像とみなせる．W は 0 でない有限次元ベクトル空間なので固有ベクトル $v \in W \setminus \{0\}$ が存在し，$v^{[p]} = \lambda v$ を満たす．$\lambda \neq 0$ ならば，c を λ^{-1} の $p-1$ 乗根とすると $(cv)^{[p]} = c^p v^{[p]} = cv$ となる． $\square$

ちなみに，半線形写像を得た時点で次の一般的命題を使うこともできる．

命題 5.34. V が k 上の有限次元ベクトル空間で，$f \colon V \to V$ が半線形写像ならば，“半単純部分” V_{s} と “冪零部分” V_{n} とよばれる f 安定部分空間への分解 $V = V_{\mathrm{s}} \oplus V_{\mathrm{n}}$ が一意に存在し次を満たす：

- V_{s} は固有値 1 の固有ベクトルからなる基底をもつ．（f は線形ではなく半線形なので，これは V_{s} の任意の元が固有値 1 であることを意味しない．）
- V_{n} 上 f は冪零である． $\Diamond$

略証. $V_{\mathrm{s}} = \bigcap_{n \geq 0} \mathrm{Im}(f^n)$，$V_{\mathrm{n}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{Ker}(f^n)$ とすればよい（詳細略）． $\square$

5.7 余談：K3 曲面への μ_p, α_p 作用と商

定義 5.35 (K3 曲面，RDP K3 曲面)**.** 固有かつ滑らかな代数曲面 X が **K3 曲面** (*K3 surface*) であるとは，$\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X$ と $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ が成り立つことをいう．

固有な代数曲面 X が特異点を有理二重点（RDP）しかもたないとする．X が **RDP K3 曲面** (*RDP K3 surface*) [*21]であるとは，X の最小特異点解消が K3 曲面になることをいう． $\Diamond$

注 5.36. K3 曲面および RDP K3 曲面について次が成り立つ．

- K3 曲面および RDP K3 曲面はつねに射影的である．
- X が K3 曲面のとき，1 つめの条件から $\Omega^1_X \cong (\Omega^1_X)^\vee = \Theta_X$ という同型がある．
- X が RDP K3 曲面の場合も含めて $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ である．
- X が RDP K3 曲面のとき，$\tilde{X} \to X$ を最小特異点解消とし $E \subset \tilde{X}$ を例外集合とすると，$\Omega^2_{\tilde{X}}$ の生成元 $\omega_{\tilde{X}}$ の $\tilde{X} \setminus E \cong X \setminus \mathrm{Sing}(X) =: X^{\mathrm{sm}}$ への制限が $\Omega^2_X|_{X^{\mathrm{sm}}}$ および $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega^2_X)$ を生成する．とくに，RDP K3 曲面の標準因子も 0 に線形同値である．

[*21] あまり一般的でない用語だが，一応私だけでなく Ekedahl–Hyland–Shepherd-Barron もこの用語を用いている．

- K3 曲面 X の Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ は torsion-free だが，RDP K3 曲面 X の滑らかな部分の Picard 群 $\mathrm{Pic}(X^{\mathrm{sm}})$ は torsion をもちうる． ◊

定理 5.37. X が K3 曲面ならば $H^0(X, \Theta_X) = 0$ である． ◊

証明. $k = \boldsymbol{C}$ のときは，Hodge 対称性 $\dim H^0(X, \Omega^1_X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ と前述の同型 $\Theta_X \cong \Omega^1_X$ から従う．一般の標数 0 の場合も $\boldsymbol{C}$ の場合に帰着できる．

一方で，正標数の場合には Hodge 対称性が一般に成り立たない*22（この場合には結果的には成り立つが）ので証明は難しい．Rudakov–Shafarevich [RS76, Theorem 7], Nygaard [Nyg79, Corollary 3.5], Lang–Nygaard [LN80] により証明されている． □

したがって，K3 曲面への μ_p, α_p 作用で非自明なものは存在しない．

ところが, K3 曲面よりもう少し広く RDP K3 曲面を考えると, 大域ベクトル場をもつ例が存在し, μ_p や α_p の作用はそれぞれ標数 $\neq p$，標数 $= p$ での $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ の作用に類似するさまざまな性質をもつことを [Mat23a], [Mat23b] で示した．例えば作用による商に関して定理 5.39 が成り立つ．

補題 5.38. 固有代数曲面 X が以下を満たすならば X は RDP K3 曲面である．

(1) X の特異点は RDP のみ．
(2) 余次元 2 以上の閉部分スキーム $Z \subset X$ が存在し，$H^0(X \setminus Z, \Omega^2_X)$ は non-vanishing な元 ω で生成される 1 次元ベクトル空間である．
(3) X はアーベル曲面，（準）超楕円曲面，RDP Enriques 曲面でない．

逆に RDP K3 曲面はこの条件を満たす（(2) では $Z = \mathrm{Sing}(X)$ ととれる）． ◊

略証. 前半を示す．(2) の ω は最小特異点解消 $\tilde{X} \to X$ 上の non-vanishing な元 $\omega_{\tilde{X}}$ に一意的に延長する（2 次元特異点に関して，この条件が成り立つことと RDP であることは同値である）．したがって $\tilde{X}$ の標準因子は自明である．標準因子が自明な曲面は K3 曲面の他にもあるが，それらは条件 (3) で除外している．

後半は，(2) は既に注 5.36 で述べた．他は明らか． □

定理 5.39. RDP K3 曲面 X に $G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ が非自明に作用しているとし，対応する乗法型または加法型のベクトル場を $D \neq 0$ とおく．

(1) 商 $Y := X/G = X^D$ は RDP K3 曲面，RDP Enriques 曲面，有理曲面のいずれかである．
(2) $G = \mu_p$ とする．このとき D の $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega^2_X)$ への作用（定義 4.3）が自明（0 倍）であることと，商 $Y := X/\mu_p = X^D$ が RDP K3 曲面であることは同値である． ◊

注 5.40. μ_p の場合の (2) の判定法は，余談 4.4 で述べたように，標数 $\neq p$ での $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 作用の場合と並行的なものになっている．

標数 p の $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 作用と α_p 作用の場合には，同様の判定法は望めない．というのは，大域 2 次微分形式への作用が自明という条件は自動的に成り立ってしまう（1 次元ベクトル空間の位数 p の自己同型と，p 乗して 0 になる自己準同型は必ず自明である）ので． ◊

*22 例えば，標数 2 の Enriques 曲面 Y が古典的，特異，超特異のとき（6.1 節参照），$(\dim H^0(Y, \Omega^1_Y), \dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y))$ はそれぞれ $(1,0), (0,1), (1,1)$ である．

略証. (1) 商写像を $\pi\colon X \to Y$ とおく．まず Rudakov–Shafarevich 公式より（例 4.17 より）$\mathrm{kod}(Y) \le \mathrm{kod}(X)$ である．（以下，小平次元 $-\infty$ と 0 の曲面の分類およびいくつかの不変量については既知とする．）標数と異なる素数 l に対する l 進エタールコホモロジーを用いて Betti 数 $b_i(Y) := \dim_{\boldsymbol{Q}_l} H^i_{\text{ét}}(Y, \boldsymbol{Q}_l)$ を定める．μ_p または α_p による商写像 π は同相ゆえ Betti 数を変えないので，$b_1(Y) = b_1(X) = 0$ である．一方でアーベル曲面と（準）超楕円曲面と非有理線織曲面の b_1 は 0 でなく，b_1 は双有理同値で不変なので，Y はこれらの曲面に双有理同値でない．したがって Y は K3 曲面，Enriques 曲面，有理曲面のいずれかに双有理同値である．

（以下，標準特異点の概念を暗に用いる．）Y が K3 曲面または Enriques 曲面に双有理同値だと仮定し，特異点が RDP しかないことを示す．$(D) > 0$ だとすると，Rudakov–Shafarevich 公式より $\pi^* K_Y < 0$ であり，この場合 Y は K3 曲面や Enriques 曲面に双有理同値にならない．以下 $(D) = 0$ だとする．同様に $\pi^* K_Y = 0$ である．Y の最小特異点解消を $\tilde{Y} \to Y$ とおく．Y が RDP でない特異点を含むと，その点の上にある曲線 $C \subset \tilde{Y}$ で $K_{\tilde{Y}}$ に負の係数で現れるものが存在し，$\tilde{Y}$ が K3 曲面または Enriques 曲面に双有理同値であることに反する．したがって Y の特異点は RDP しかない．$\tilde{Y}$ が（双有理同値なだけでなく）K3 曲面・Enriques 曲面であることを示すのは略.

(2) $X' := X \setminus (\mathrm{Sing}(X) \cup \mathrm{Supp}\langle D \rangle)$ とおき，$Y' := X'^D$ とおく．定義より X' は滑らかで，命題 3.2 より $Y' \subset Y^{\mathrm{sm}}$ であり，したがって命題 4.2 が $X' \to Y'$ に適用できて $H^0(Y', \Omega^2_Y(\pi_*(D))) = H^0(X', \Omega^2_X((D)))^D$ を得る．

D の $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega^2_X)$ への作用が自明でないとする．$(D) > 0$ ならば Y は RDP K3 曲面でないことは (1) で見た．$(D) = 0$ ならば，$H^0(Y', \Omega^2_{Y^D}) \cong H^0(X', \Omega^2_X)^D = 0$ なので，補題 5.38 より Y は RDP K3 曲面でない.

D の $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega^2_X)$ への作用が自明であるときに Y が RDP K3 曲面であることを示す.

P が RDP かつ $P \notin \mathrm{Fix}(D)$ のとき，$\pi(P)$ は滑らかまたは RDP である（省略．雰囲気としては，例 3.16 のように特異点がよりマイルドになる）.

仮定の下で任意の点 $P \in \mathrm{Fix}(D)$ に対し $\pi(P)$ は RDP であることを示す．簡単のため P が滑らかな点だと仮定する．局所座標をとって $D = a_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$（$a_1, a_2 \in \boldsymbol{F}_p$）とする（命題 3.3）．$H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega^2_X)$ の生成元 ω_X をとり P で局所的に $\omega_X = u\, dx_1 \wedge dx_2$ と表示する．ω_X は non-vanishing なので $u \in \mathcal{O}^*_{X,P}$ である．$0 = D(\omega_X) = ((a_1 + a_2)u + D(u)) dx_1 \wedge dx_2$ であり，$D(u) \subset \mathfrak{m}_P$（$P \in \mathrm{Fix}(D)$）なので $a_1 + a_2 = 0$ であり，$D \ne 0$ なので $a_1, a_2 \ne 0$ である．したがって $\pi(P)$ は例 3.8 で見たように A_{p-1} 型 RDP である．同時に，P が $\mathrm{Fix}(D)$ の孤立点であることも分かり，$(D) = 0$ が分かった.

なお P が RDP である場合は, $X_1 \to X$ を P での blow-up とすると, $P \in \mathrm{Fix}(D)$ より D は X_1 の（正則）ベクトル場 D_1 に延長し（詳細略），X_1 の場合に帰着できる（詳細略）．これを繰り返して $\mathrm{Fix}(D) \cap \mathrm{Sing}(X) = \emptyset$ の場合に帰着できる.

$H^0(Y', \Omega^2_Y) \cong H^0(X', \Omega^2_X)^D = H^0(X', \Omega^2_X)$ を得る．すなわち $Y = X^D$ の余次元 2 以上の閉部分スキームの補集合上に non-vanishing な 2 次微分形式 ω_Y がある．また，Y の特異点は RDP のみである．あとは Y が $K_Y \sim 0$ を満たす RDP Enriques 曲面でないことを示せば，補題 5.38 から Y が RDP K3 曲面であることが従う．$\mathcal{O}_Y \subset \pi_* \mathcal{O}_X$ が直和因子なことから $\dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \le \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ であり，これと $K_Y \sim 0$ を満たす Enriques 曲面は存在しない（命題 6.1）（RDP を処理する議論は省略）. □

定理 5.39(2) が標数 0 での現象の類似であるのに対し，次の性質は μ_p, α_p 作用に特有のものである．K3 曲面の**高さ** (*height*) $\mathrm{ht}(X)$ とは，$\{1, 2, \ldots, 10\} \cup \{\infty\}$ に値をとる，正標数特有の不変量である（定義は省略）.

命題 5.41. X を RDP K3 曲面とし，$\pi\colon X \to Y$ を $G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ による商とする.

(1) ([Mat23b, Theorem 4.3]) Y も RDP K3 曲面ならば，"双対" 射 $\pi'\colon Y \to X^{(p)}$ も $G' \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ による商である．G と G' は一致することも異なることもある．

(2) ([Mat23c, Theorem 1.3, Corollary 6.12]) Y が RDP K3 曲面であることと，$\mathrm{ht}(X)$ が有限であることは同値である．さらにこのとき，$\mathrm{ht}(X) = \mathrm{ht}(Y)$ が成り立ち，この高さは $p, G, G', \mathrm{Sing}(X), \mathrm{Sing}(Y)$ から計算できる． $\diamondsuit$

証明. (1) π を与える μ_p または α_p の作用に対応する（正則）ベクトル場を D とおく．定理 5.39(1) の証明より $(D) = 0$ である．

Y は RDP K3 曲面なので，non-vanishing な $\omega_Y \in H^0(Y^{\mathrm{sm}}, \Omega_Y^2)$ が存在する．命題 3.23 から Y 上の p-closed な正則ベクトル場 D_Y で，$(D_Y) = 0$ と $Y^{D_Y} = X^{(p)}$ を満たすものを得る．$D_Y^p = hD_Y$ とおくと，D_Y^p が正則で $(D_Y) = 0$ なことから h は正則であり，したがって $h \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$ である．D_Y を定数倍ずらすと $h = 1$ または $h = 0$ にでき，これは μ_p 作用または α_p 作用に対応する．

(2) Y が RDP K3 曲面でないなら RDP Enriques 曲面または有理曲面である．いずれの場合も，$H^2_{\text{ét}}(Y, \boldsymbol{Q}_l)$ は代数的サイクル（因子のサイクル類）で生成される．π は同相ゆえエタールコホモロジーの間に同型を誘導するので，$H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{Q}_l)$ もそうである．そのような RDP K3 曲面の高さは無限である．

Y が RDP K3 曲面だとする．Witt ベクトル値コホモロジー $H^2(X, W_n\mathcal{O}_X)$ へのフロベニウス作用を用いた $\mathrm{ht}(X)$ の特徴づけ（省略）を用いる．適当にブローアップして $X^{\mathrm{sm}} \cap \mathrm{Supp}\langle D\rangle \neq \emptyset$ の場合に帰着できる（省略）．$x \in X^{\mathrm{sm}} \cap \mathrm{Supp}\langle D\rangle$ とし，$y = \pi(x)$ とおく．RDP y の型に応じた適切な n をとると，$\pi^*\colon H^2(Y, W_{n+1}\mathcal{O}_Y) \to H^2(X, W_{n+1}\mathcal{O}_X)$ の計算が x と y の局所環での適切な Ext の間の引き戻し射で計算できて，π^* の像が記述できる[*23]．$\pi'\colon Y \to X^{(p)}$ についても適切な n' をとり同じことを行う．すると $F = \pi' \circ \pi$ が誘導する $W_{n+n'+1}$ 係数コホモロジーの射の像が分かり，高さが $n + n' + 1$ であることが従う． $\square$

注 5.42. 命題 5.41(1) の，$G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ による商であるという仮定は必要である：RDP K3 曲面間の p 次非分離な射 $\pi\colon X \to Y$ で，$G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ による商でない（対応する有理ベクトル場の中に正則なものがない）例も存在する．ちなみに，そのような例も記述・分類した（[Mat23b, Section 5]）． $\diamondsuit$

注 5.43. $G = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ の場合，命題 5.41(2) は「Y が RDP K3 曲面ならば高さは有限」の方向は成り立ち，そのとき高さは $p, \mathrm{Sing}(Y)$ から計算できるが，逆は成り立たない． $\diamondsuit$

6 μ_p, α_p 被覆

6.1 節で見るように，[BM76, Sections 3–5] では標数 2 の Enriques 曲面 Y を考察している．Y は 3 種類に分類され，それぞれの場合に Y の標準的な G-被覆（G-torsor）($G \in \{\mu_p, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}, \alpha_p\}$) を考えることが必要になる．$H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ または $\mathrm{Pic}(Y)$ の適切な元を用いた具体的な構成が与えられており，この構成は一般の標数 p のスキーム上の G-torsor に一般化できる．α_p と $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ の場合を 6.2 節で，μ_p の場合を 6.4 節で説明する．

ところで，上述の構成は群スキーム $G \in \{\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}, \alpha_p, \mu_p\}$ の固定点をもたない作用を与える．作用が孤立固定点をもち対応する Y の点が商特異点である場合を含めるために一般化した構成を 6.3 節，6.5 節で説明する．これを導入したのは，RDP K3 曲面の G による商が再び RDP K3 曲面になる（ことがある）ことの逆向

[*23] これについては，証明はしたものの，なぜこれで証明できるのかは分かっていない．分かったら教えてください．

きの構成をしたかったからであり，概要を 6.6 節で述べる．

特異点の G-torsor を調べることで特異点が G（やそれを商にもつ有限群スキーム）による商特異点か否かを調べることについて 6.9 節で触れる．

本節でも k は標数 $p>0$ の代数閉体とする．

6.1 歴史的背景：Enriques 曲面の被覆

完備滑らかな代数曲面 Y で $K_Y \equiv 0$（数値的同値）と $b_2(Y)=10$（左辺は第 2 Betti 数，定義は定理 5.39(1) の証明を見よ）を満たすものを**エンリケス曲面** (*Enriques surface*) とよぶ．

標数が 2 でないとき，Enriques 曲面 Y の基本群は必ず $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ であり，対応する $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 被覆 $\bar{Y}$ は（滑らかな）K3 曲面になる（逆に，固定点のない $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 作用による K3 曲面の商として Enriques 曲面を定義することもできる）．このとき K3 曲面の大域（2 次）微分形式への $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ の作用は非自明で，Enriques 曲面は大域微分形式をもたない．

標数が 2 のときは，固定点のない $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 作用による K3 曲面の商は Enriques 曲面になるが，そうでない Enriques 曲面も存在する．より精密に，次が成り立つ．

定理 6.1 ([BM76, Sections 3–5])**.** k が標数 2 の（代数閉）体で Y が k 上の Enriques 曲面のとき，次のうちちょうど 1 つが成立する．

- $K_Y \not\sim 0$，$2K_Y \sim 0$，$H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0$．このとき Y を**古典的** (*classical*) な Enriques 曲面という．
- $K_Y \sim 0$，$\dim H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=1$ で，この空間へのフロベニウスの作用は非零．このとき Y を**特異** (*singular*) な Enriques 曲面という．
- $K_Y \sim 0$，$\dim H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=1$ で，この空間へのフロベニウスの作用は零．このとき Y を**超特異** (*supersingular*) な Enriques 曲面という．

Y が古典的のとき，$K_Y \in \mathrm{Pic}(Y)[2]$ を用いて μ_2 被覆 $\bar{Y}\to Y$ を得る．Y が特異（resp. 超特異）のとき，$H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ の 0 でない元を用いて $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 被覆（resp. α_2 被覆）$\bar{Y}\to Y$ を得る．いま使った群スキームを $G\in\{\mu_2,\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z},\alpha_2\}$ とおく．$G=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ ならば $\bar{Y}$ は（滑らかな）K3 曲面である．$G=\mu_2$ または $G=\alpha_2$ ならば，$\bar{Y}$ は K3-like 曲面（定義 6.2）であり，必ず特異点をもつ． $\Diamond$

なお，torsor を用いた定式化については 6.8 節を見よ．

定義 6.2. 固有で被約な代数曲面 X が *K3-like surface* であるとは，双対化層 ω_X をもち $\omega_X\cong\mathcal{O}_X$ であり，$\dim H^i(X,\mathcal{O}_X)=1,0,1$（$i=0,1,2$）を満たすことをいう． $\Diamond$

注 6.3. 滑らかな K3-like 曲面であることと，K3 曲面であることは同値である．固有代数曲面 X が特異点を有理二重点（RDP）しかもたない場合，X が K3-like 曲面であることと X が RDP K3 曲面であることは同値である．

RDP でない（孤立）特異点をもつ正規 K3-like 曲面も，正規でない K3-like 曲面も存在し，どちらも Enriques 曲面の K3-like 被覆になりうる． $\Diamond$

余談 6.4. ちなみに，Enriques 曲面 Y の K3-like 被覆 $\bar{Y}$ が正規な場合に，$\bar{Y}$ の特異点の配置として可能なものはすべて決定した [Mat22a, Theorem 1.5].

6.2 α_p 被覆（滑らかな場合）

Y は k 上の代数多様体で，$H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$ だとする．（例えば，Y が固有ならよく，または $Y = \overline{Y} \setminus Z$ で $\overline{Y}$ が固有かつ正規で $Z \subset \overline{Y}$ が余次元 2 以上ならよい．）（なお，この仮定がなくても被覆を構成することはできるが，結果が途中の選択に依存するようになる．6.9 節も見よ．）$e \in H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ が $F(e) = \lambda \cdot e$（$\lambda \in k$）を満たすとする．

$\lambda = \kappa^{p-1}$ を満たす $\kappa \in k$ を 1 つとる．e を Cech コサイクルで表して $e = (U_i, f_{ij})$ とする（$\bigcup_i U_i = Y$，$f_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_Y)$）．$F(e) = \lambda e$ より，$f_{ij}^p - \lambda f_{ij} = g_i - g_j$ なる $(g_i) \in \prod \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$ が存在するので 1 つ固定する（$H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$ を除き一意である）．$\mathcal{O}_Y$ 代数の層 $\mathcal{B}$ を，U_i 上で $\mathcal{B}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}[T_i]/(T_i^p - \lambda T_i - g_i)$ とし，U_{ij} 上で $T_i - T_j = f_{ij}$ で張り合わせることで定める．また，$\mathcal{O}_Y$ 加群の射 $\delta\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を $\delta(\phi(T_i)) := \frac{\phi(T_i+\kappa)-\phi(T_i)}{\kappa}$ で定める（右辺は多項式 ϕ に対する $\frac{\phi(Z_1+Z_2)-\phi(Z_1)}{Z_2} \in \mathcal{O}_{U_i}[Z_1, Z_2]$ に $(Z_1, Z_2) = (T_i, \kappa)$ を代入したもの）．

δ は well-defined であり（$\mathcal{B}|_{U_i}$ の元の T_i の多項式としての表示によらず，また i のとり方によらず），$\delta(T_i) = 1$，$\delta(rs) = \delta(r)s + r\delta(s) + \kappa\delta(r)\delta(s)$，$\delta(r^p) = \kappa^{p-1}\delta(r)^p$，$\delta^p = 0$ が成り立つ．$\kappa \neq 0$ ならば，$\mathrm{id} + \kappa\delta$ は $T_i \mapsto T_i + \kappa$ を満たす（この条件で一意に定まる）$\mathcal{B}$ の $\mathcal{O}_Y$ 代数としての位数 p の自己同型である．$\kappa = 0$ ならば，δ は加法型の導分である．すなわち，それぞれ $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 作用と α_p 作用に対応する．

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathrm{Ker}(\delta^2) \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_Y \to 0$$

が最初にとった $e \in H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y)$ に対応する拡大である．

$\pi\colon X := \mathcal{S}pec\,\mathcal{B} \to Y$ が，$\lambda = 0$ ならば α_p 被覆，$\lambda \in k^*$ ならば $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 被覆である．$\mathrm{Im}(\delta)$ が生成するイデアルは $\mathcal{O}_Y$ 全体に一致する（局所的に $\delta(T_i) = 1$ なので）ので，$\mathrm{Fix}(G) = \emptyset$ である．

なお, 次の意味で, X はコサイクル (U_i, f_{ij}) と (g_i) のとり方に依存しない：簡単のため同じ被覆に関するコサイクル $(f_{ij}), (f'_{ij})$ のみ考える．$(g_i), (g'_i)$ を $f_{ij}^{(\prime)p} - \lambda f_{ij}^{(\prime)} = g_i^{(\prime)} - g_j^{(\prime)}$ なるコチェインとする．$f_{ij} - f'_{ij} = h_i - h_j$ なるコチェイン (h_i) をとる．(g'_i) から作ったものを $\mathcal{B}', X'$ とおく．$g'_i - g_i - (h_i^p - \lambda h_i) =: c \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$ である．$b^p - \lambda b = c$ を満たす $b \in k$ をとると，$T'_i = T_i + h_i + b$ により同型 $\mathcal{B}' \cong \mathcal{B}$，$X' \cong X$ が得られる．

X の特異点について考える．$\lambda \neq 0$ のとき，$T_i^p - \lambda T_i - g_i$ の T_i での偏微分がつねに単数なので，$X \to Y$ はエタールであり，したがって Y が滑らかならば X も滑らかである．

$\lambda = 0$ の場合を考える．とりあえず Y が滑らかな場合を考える．3.4 節で定めた 1 次微分形式 η は U_i 上で $d(T_i^p) = d(g_i)$ になる．（$g_i - g_j = f_{ij}^p$ の微分は消えるので，これがきちんと張り合っていることが分かる．）局所的には $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y[T_i]/(T_i^p - g_i)$ であるため，X が $\pi^{-1}(P)$ で滑らかであることと $\eta = d(g_i)$ が P で消えることは同値である．すなわち，（Y が滑らかという仮定の下で）$\mathrm{Sing}(X) = \pi^{-1}(\mathrm{Zero}(\eta)) = \pi^{-1}(\mathrm{Zero}(d(g_i)))$ である．

例 6.5. $\lambda = 0$（$G = \alpha_p$）の場合を考える．（局所的に）$Y = \mathrm{Spec}\,k[x, y]$ とし，P を原点とし，$l, m \geq 2$ とし，$g = x^l + y^m + 1$ だとする．$X = \mathrm{Spec}\,k[x, y, T]/(T^p - g) = \mathrm{Spec}\,k[x, y, T]/((T-1)^p - x^l - y^m)$ は明らかに $\pi^{-1}(P)$ で特異である．にもかかわらず g 自身は P で消えていないことに注意する．これは標数と素な次数の巡回被覆の場合との相違点である．$dg = lx^{l-1}dx + my^{m-1}dy$ の零点を考えると，$p = \mathrm{char}\,k$ が l, m を割らないならば $\pi^{-1}(P)$ は孤立特異点だが，p が l, m のちょうど一方を割るならば $\mathrm{Zero}(dg)$ は 1 次元（それぞれ $(y = 0)$，$(x = 0)$）であり，X は正規ですらない．p が l と m の両方を割る場合は $dg = 0$ であり X は被約でない． ♢

例 6.6. $e=0$ の場合，コサイクル・コチェインとして $f_{ij}=0$，$g_i=0$ をとれるので，$\mathcal{B}=\mathcal{O}_Y[T]/(T^p-\lambda T)$ となり，つまり $X=G\times Y$ である．$\lambda\neq 0$ の場合 X は Y の p 個の非交差和に同型であり，$\lambda=0$ の場合 X は被約でない．この例は面白くないので，面白い例を得るには $H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ から 0 でない F 固有ベクトルをとる必要がある．

なお $H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ が 0 でなく有限次元ならば必ず 0 でない F 固有ベクトルが存在する（命題 5.27 または命題 5.34 と同様）． $\Diamond$

逆に，$\pi\colon X\to Y$ が $G=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}=\langle g\rangle$（resp. $G=\alpha_p$）の固定点をもたない作用による商だとすると，$\delta=g-1$ とする（resp. δ を対応する加法型導分とする）とき，拡大

$$0\to\mathcal{O}_Y\to\operatorname{Ker}(\delta^2)\xrightarrow{\delta}\mathcal{O}_Y\to 0$$

が $H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ の元を定め，$F(e)=e$（resp. $F(e)=0$）が成り立つ．これは上の対応（の $\lambda=1,0$ の場合）の逆を与える．なお，e を $\operatorname{Aut}(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{F}_p^*$ 倍（resp. $\operatorname{Aut}(\alpha_p)=k^*$ 倍）ずらすと，射 $\pi\colon X\to Y$ は同じだが群作用がこの自己同型でひねったものに置き換わる．

6.3 α_p 被覆（特異点がある場合）

この小節を通して，証明は [Mat23b, Section 6.2]，[Mat23c, Section 3] を参照．

Y は k 上の正規 Gorenstein*24代数多様体，$\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_Y$ はイデアル層で $\dim\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})=0$ を満たすものとし，$Y':=Y\setminus\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})$ とする．$H^0(Y',\mathcal{O}_Y)=k$ と仮定する．$e\in\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y)$ が $F(e)=\lambda\cdot\iota^*(e)$（$\lambda\in k$）を満たすとする．ただし $\iota^*\colon\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y)\to\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}^{(p)},\mathcal{O}_Y)$ はイデアルの包含写像から誘導される準同型で，$F\colon\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y)\to\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}^{(p)},\mathcal{O}_Y)$ はフロベニウスである．（なお台の次元に関する仮定と Gorenstein 性より ι^* の単射性が分かる（[Mat23c, Lemma 3.1]）．）

Y' 上で e の制限 $e|_{Y'}\in H^1(Y',\mathcal{O}_Y)$ に対して前小節の構成を行い G 被覆 $X'=\operatorname{Spec}\mathcal{B}'\to Y'$ および $\delta\colon\mathcal{B}'\to\mathcal{B}'$ を得る（G は $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ または α_p）．

$X=\operatorname{Spec}\mathcal{B}\to Y$ を $k(X)$ での Y の整閉包とする．3.4 節での（補題 3.22 を用いる）議論と同様にして δ は $\delta\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ に延長し，$X\to Y$ は G の作用に関する商写像になる．

$\mathcal{I}$ として $e\in\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y)$ を満たす最大のイデアルをとると，$\operatorname{Im}(\delta|_{\operatorname{Ker}(\delta^2)})=\mathcal{I}$ になり，

$$0\to\mathcal{O}_Y\to\operatorname{Ker}(\delta^2)\xrightarrow{\delta}\mathcal{I}\to 0$$

が e に対応する拡大である．

6.4 μ_p 被覆（滑らかな場合）

Y は k 上の代数多様体で，$H^0(Y,\mathcal{O}_Y)=k$ だとする．（例えば，Y が固有ならよく，または $Y=\overline{Y}\setminus Z$ で $\overline{Y}$ が固有かつ正規で $Z\subset\overline{Y}$ が余次元 2 以上ならよい．）（なお，この仮定がなくても被覆を構成することはできるが，結果が途中の選択に依存するようになる．6.9 節も見よ．）

L を $\operatorname{Pic}(Y)$ の元で $L^{\otimes p}\cong\mathcal{O}_Y$ なるものとする．同型写像 $\psi\colon L^{\otimes p}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_Y$ を 1 つとる．$\mathcal{O}_Y$ 加群の層 $\mathcal{B}:=\bigoplus_{0\leq i<p}L^{\otimes i}$ に $\mathcal{O}_Y$ 代数の構造を（つまり乗法を），$i+j<p$ ならば自然な同型 $L^{\otimes i}\otimes L^{\otimes j}\xrightarrow{\sim}L^{\otimes i+j}$ で，$i+j\geq p$ ならばこれに ψ（正確には $\psi\otimes\operatorname{id}_{L^{\otimes i+j-p}}$）を合成することで定める．

*24 参考：局所環に対し，超曲面特異点 $\Longrightarrow$ 完全交差 $\Longrightarrow$ Gorenstein，が成り立つ．

$\mathcal{B}$ を定義した式がそのまま $G=\mu_p$ の作用を与え（命題 5.24），$\pi\colon X:=\mathcal{S}pec\,\mathcal{B}\to Y$ が商写像である．対応する乗法型導分は $D=\sum_{i\in\boldsymbol{F}_p} i\cdot\mathrm{pr}_i$ である．系 5.25 と同様の議論で，$\mathrm{Im}(D)$ が生成するイデアルは $\bigoplus_{i\in\boldsymbol{F}_p\setminus\{0\}} L^{\otimes i}$ が生成するイデアルに一致するが，乗法の定義から結局このイデアルは $\mathcal{B}=\mathcal{O}_X$ 全体に一致する．すなわち $\mathrm{Fix}(G)=\emptyset$ である．

なお，次の意味で X は同型射 $\psi\colon L^{\otimes p}\to\mathcal{O}_Y$ のとり方に依存しない：ψ' を別の同型射とし，これを用いて作った $\mathcal{O}_Y$ 代数を $\mathcal{B}'=\bigoplus_{0\le i<p} L^{\otimes i}$ とおく．$\psi'\circ\psi^{-1}=c\in\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_Y)=H^0(Y,\mathcal{O}_Y^*)=k^*$ である．$b^p=c^{-1}$ を満たす $b\in k^*$ をとると，$\bigoplus_i(\times b^i)\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ が同型になる．

ちなみに，ここまでは D が登場する部分を除き一般の μ_n でも同様である．

X の特異点について考える．とりあえず Y が滑らかな場合を考える．L の局所的な生成元を s とおくと，3.4 節で定めた 1 次微分形式 η は $d\log(\psi(s^{\otimes p}))$ になる．（別の生成元 s' に対して $u:=s'/s\in\mathcal{O}_Y^*$ であり，$\psi(s'^{\otimes p})=u^p\psi(s^{\otimes p})$ ゆえ $d\log(\psi(s'^{\otimes p}))-d\log(\psi(s^{\otimes p}))=d\log(u^p)$ は消えるので，η が well-defined であることが分かる．）局所的には $\mathcal{O}_X=\mathcal{O}_Y[S]/(S^p-\psi(s^{\otimes p}))$ であるため，X が $\pi^{-1}(P)$ で滑らかであることと η が P で消えることは同値である．すなわち，（Y が滑らかという仮定の下で）$\mathrm{Sing}(X)=\pi^{-1}(\mathrm{Zero}(\eta))$ である．

$\psi(s^{\otimes p})$ は単元だが，これが零にならない点でも X が特異になりうる（正規すら保証されない）のは例 6.5 と同様である．

例 6.7. $L\cong\mathcal{O}_Y$ の場合，L として $\mathcal{O}_Y$ 自身，ψ として id をとって構成すると $\mathcal{B}=\mathcal{O}_Y[S]/(S^p-1)=\mathcal{O}_Y[S]/((S-1)^p)$（$L=\mathcal{O}_Y$ の生成元 1 のことを S と書いた）であり，X は被約でない．この例は面白くないので，面白い例を得るには $\mathrm{Pic}(Y)$ から非自明な p-torsion 元をとる必要がある． ♢

6.5 μ_p 被覆（特異点がある場合）

この小節を通して，証明は [Mat23b, Section 6.1] を参照．

Y は正規で $Z\subset Y$ は余次元 2 以上の閉部分スキームとする．$Y':=Y\setminus Z$ とする．$H^0(Y',\mathcal{O}_Y)=k$ と仮定する．L' を $\mathrm{Pic}(Y')$ の元で $L'^{\otimes p}\cong\mathcal{O}_{Y'}$ なるものとする．

Y' 上で前小節の構成を行い μ_p 被覆 $X'=\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}'\to Y'$ および乗法型導分 D を得る．$X=\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}\to Y$ を $k(X)$ での Y の整閉包とする．これも G の作用に関する商写像になる．$\mathcal{B}=\bigoplus L_i$，$L_i$ は $L'^{\otimes i}$ の $Y'\hookrightarrow Y$ による順像，となる．一般に $L_1^{\otimes i}\to L_i$ は全射ではない．

例 6.8 (cf. 例 3.8)**.** $n\ge 2$ とする（p で割れても割れなくてもよい）．$Y=\mathrm{Spec}\,S$，$S=k[x,y,z]/(z^n-xy)$ とし，$Z\subset Y$ を原点とする（これは A_{n-1} 型 RDP である）．L をイデアル層 $(z,y)\subset\mathcal{O}_Y$ とし，L' を L の $Y':=Y\setminus Z$ への制限とし（これは可逆層である），$\psi\colon L'^{\otimes n}\to\mathcal{O}_{Y'}$ を $\psi(f_1\otimes\cdots\otimes f_n):=\frac{f_1\cdots f_n}{y}$ で定め（これは同型射である），上述の構成を行う．$1\le i\le n-1$ に対し $L_i=(z^i,y)$ となり（$2\le i\le n-1$ のときこれは $L_1^i=(z,y)^i$ より真に大きい），L_1 の元 z のことを ξ，L_{n-1} の元 y のことを η と書くと $X=\mathrm{Spec}\,R$，$R=k[\xi,\eta]$，$x=\xi^n$，$y=\eta^n$，$z=\xi\eta$ となる． ♢

6.6　余談：K3 曲面の被覆

Y が K3 曲面のとき，$H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$，$\mathrm{Pic}(Y) = 0$ なので，本節で述べた構成のうち滑らかな場合のものは適用できない（自明な被覆しか得られない）．しかしながら，Y が所定の個数・種類の RDP をもつ K3 曲面のとき，Y' をそれらの RDP の補集合として 6.3 節，6.5 節の方法で非自明な G 被覆 $X \to Y$ が得られる．[Mat23b, Section 7] では被覆が K3-like 曲面になる場合を扱った（RDP K3 曲面になる場合とそうでない場合がある）．

例 6.9. Y が標数 $p = 2$ の RDP K3 曲面で，D_4^1 型（resp. D_4^0 型）の RDP を 2 つ（z_1, z_2 とおく）もつものとし，$\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ を，$\mathcal{O}_Y/\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1,2} \mathcal{O}_{Y,z_i}/\mathfrak{m}_{z_i}$ で定める．このとき $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}, \mathcal{O}_Y) = 1$ であり，生成元を e とおくと $F(e) = \lambda \cdot \iota^*(e)$，$\lambda \in k^*$（resp. $\lambda = 0$）となる．また z_i への制限 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}, \mathcal{O}_Y) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{z_i}, \mathcal{O}_{Y,z_i})$ による e の像も 1 次元空間の生成元である．この元が定める $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 被覆（resp. α_p 被覆）を $\pi\colon X \to Y$ とおくと，X は K3 曲面（resp. 特異点をもつ K3-like 曲面）になる．さらに，$G = \alpha_p$ の場合も含めて z_1, z_2 の逆像では X は滑らかである．K3-like 曲面のコホモロジーの次元の条件は $0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{I} \to 0$ の長完全列を用いて確認できる．

標数 $3, 5$ でも類似の結果がある．標数 3 のときは E_6^1 型（resp. E_6^0 型），標数 5 のときは E_8^1 型（resp. E_8^0 型）の RDP を用いる．$\Diamond$

例 6.10. Y が標数 $p = 2$ の RDP K3 曲面で，A_1 型の RDP を 8 つ（$z_1, \dots, z_8$ とおく）もち，最小特異点解消 $\tilde{Y}$ での例外曲線を $C_1, \dots, C_8$ とするとき $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(C_1 + \cdots + C_8) \cong \tilde{L}^{\otimes 2}$ なる $\tilde{Y}$ 上の可逆層 $\tilde{L}$ があると仮定する．このとき $\tilde{L}$ の $Y' = Y \setminus \{z_1, \dots, z_8\} \cong \tilde{Y} \setminus (C_1 \cup \cdots \cup C_8)$ への制限を L' とおくと $L'^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_{Y'}$ が成り立つ．この元が定める μ_2 被覆を $\pi\colon X \to Y$ とおくと，X は特異点をもつ K3-like 曲面になる．さらに，$z_1, \dots, z_8$ の逆像では X は滑らかである．K3-like 曲面のコホモロジーの次元の条件は直和分解 $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y \oplus L$ を用いて確認できる．

標数 $p = 3, 5, 7$ でも類似の結果がある（それぞれ，A_{p-1} 型の RDP を $\frac{24}{p+1}$ 個用いる）．

各 z_i での局所環での拡大は，適切に局所座標と番号をつけると例 6.8（の $n = p$ の場合）のようになる．$\Diamond$

[Mat24] では，$\mathrm{Sing}(Y)$ が例えば $16A_1$ で，X が K3-like 曲面の条件のうち $h^1(\mathcal{O}) = 0$ を $= 2$ に置き換えたものを満たす場合を扱った．これはアーベル曲面と同じ値であるが，$G = \mu_2, \alpha_2$ の場合は特異点集合がつねに 1 次元になり，したがって本当のアーベル曲面には絶対にならない．その略証：被覆を $X \to Y$ と書き，その “双対” ベクトル場を D_Y とし Y の最小特異点解消 $\tilde{Y}$ への延長として得られる有理ベクトル場を $D_{\tilde{Y}}$ と書く．例外曲線の $(D_{\tilde{Y}})^2$ への寄与は -32 であり，それ以外の寄与がないとすると，定理 4.7 に代入して $0 \le \deg\langle D_{\tilde{Y}} \rangle = \deg c_2(\tilde{Y}) + (D_{\tilde{Y}})^2 = 24 - 32 < 0$ となり矛盾するので，$(D_{\tilde{Y}})$ は例外曲線以外の成分をもち，その上の点で被覆 X は特異になる（命題 3.23，注 3.24）．

6.7　発展：torsor

スキームの射 $\pi\colon X \to Y$ が *G-torsor* であるとは，群スキーム G がスキーム X に作用しており，適切な fppf 被覆 $U \to Y$ に制限すると $\pi_U\colon X \times_Y U \to U$ は直積からの射影 $\mathrm{pr}_2\colon G \times U \to U$ に同型であるものをいう．

G が一定の仮定を満たす可換群スキームのとき（本節で扱った有限群スキームならばよい），Y 上の G-torsor

の同型類全体がなすアーベル群は自然に $H^1_{\mathrm{fl}}(Y,G)$ と一対一に対応する [Mil80, Corollary III.4.7]（H_{fl} は fppf コホモロジー）．（G が可換でないときは，H_{fl} を $\check{H}_{\mathrm{fl}}$ で置き換える必要があり，しかも点付き集合にしかならないので，注意が必要である．）

群スキーム（が定める fppf 層）の完全列*25

$$0 \to \alpha_p \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \xrightarrow{F} \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to 0, \qquad 0 \to \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to 0, \qquad 0 \to \mu_p \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{p} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to 0$$

の長完全列を用いて $H^1_{\mathrm{fl}}(Y,G)$ を記述できる．自然な同型 $H^i_{\mathrm{fl}}(Y,\mathbb{G}_{\mathrm{a}}) = H^i(Y,\mathcal{O}_Y)$ (i は任意)，$H^0_{\mathrm{fl}}(Y,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = H^0(Y,\mathcal{O}_Y^*)$，$H^1_{\mathrm{fl}}(Y,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = \mathrm{Pic}(Y)$ を用いて，さらに $H^0(Y,\mathcal{O}_Y) = k$ と仮定すると，同型

$$H^1_{\mathrm{fl}}(Y,\alpha_p) \cong H^1(Y,\mathcal{O}_Y)[F], \qquad H^1_{\mathrm{fl}}(Y,\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}) \cong H^1(Y,\mathcal{O}_Y)[F-1], \qquad H^1_{\mathrm{fl}}(Y,\mu_p) \cong \mathrm{Pic}(Y)[p]$$

を得る．6.2 節と 6.4 節で構成した $\pi\colon X \to Y$ は $G = \alpha_p, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}, \mu_p$ に対する G-torsor であり，この同型の具体的表示を与えている．

6.3 節，6.5 節で構成した $\pi\colon X \to Y$ は，Y' 上では torsor だが Y 上ではそうとは限らない．

注 6.11. Y は滑らかだとし，η を 1 次微分形式とする．η が局所的に $\eta = d\log(g)$（$g \in \mathcal{O}_Y^*$）の形に書けることと，Cariter operator C に対し $C(\eta) = \eta$ が成り立つことは同値であり，局所的に $\eta = dg$（$g \in \mathcal{O}_Y$）の形に書けることと，$C(\eta) = 0$ が成り立つことは同値である．したがって，μ_p や α_p に対する torsor を Cartier operator を使って記述することもできる．本稿ではこれ以上は立ち入らない． ♢

6.8 Enriques 曲面の被覆（torsor の言葉で）

標数 2 の Enriques 曲面に関する 6.1 節の内容を torsor を使って定式化する．そのためにまず Picard 関手・Picard スキームを導入する（詳しくは例えば [BLR90, Chapter 8] を参照してください）．以下の議論では Y にそこそこの仮定が必要だが詳細は省く．

k スキームの圏から群の圏への反変関手 $T \mapsto \mathrm{Pic}(Y \times T)$ は，T の Zariski 被覆に関してすら層にならないので表現可能にはなりえないが，この関手の fppf 層化 Pic_Y はそこそこの仮定の下で表現可能になる．表現するスキームも Pic_Y と書きこれを Y の Picard スキームとよぶ．Pic^τ_Y は Picard スキーム Pic_Y の “torsion 部分” である．

可換有限群スキーム G に対しその**カルティエ双対** (*Cartier dual*) を $G^\vee := \mathcal{H}om(G,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ で定める．例えば，μ_n と $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ は互いに双対であり（n は標数で割れてもよい），α_p は自分自身と双対である．

同型 $H^1_{\mathrm{fl}}(Y,G) \cong \mathrm{Hom}(G^\vee,\mathrm{Pic}^\tau_Y)$（[Sch21, Proposition 4.1]）がある．Pic^τ_Y が有限ならば，$G := (\mathrm{Pic}^\tau_Y)^\vee$ のときの右辺の元 id に対応する Y 上の標準的な G-torsor を得る．

Y を標数 2 の（代数閉体上の）Enriques 曲面とする．定理 6.1 で述べたように Y は古典的・特異・超特異のいずれかである．それぞれの場合に Pic^τ_Y は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}, \mu_2, \alpha_2$ である．とくに $\mathrm{Pic}^\tau_Y(k)$ は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}, 0, 0$ であり，どの場合も標準因子 K_Y が生成元である．$G := \mathrm{Pic}^\tau_Y$ はそれぞれ $\mu_2, \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}, \alpha_2$ であり，定理で述べた G 被覆は前段落で述べた標準的 G-torsor である．

なお，標数 2 以外では Pic^τ_Y とその双対はどちらも $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ である．

*25 右で完全であることを α_p の場合を例にして説明する．U をスキーム，$t \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(U) = H^0(U,\mathcal{O}_U)$ を切断とする．$U' = \mathcal{S}pec\,\mathcal{O}_U[T]/(T^p - t) \to U$ とおくと $\{(U' \to U)\}$ は fppf 被覆であり，$t|_{U'} = T^p$ は $T \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(U')$ の $F(U')\colon \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(U') \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(U')$ による像である．これで全射が示された．他の場合も同様である．

6.9 余談：特異点と local torsor

局所環 $Y = \operatorname{Spec} R$ の被覆を考えることもできる．簡単のため R は Hensel だとする．$Y = \operatorname{Spec} R$ の閉点の補集合を Y' とおき，Y' 上では torsor になっている（Y 上ではそうとは限らない）$\pi\colon X \to Y$ のことを *local G-torsor* という．単に G-torsor と言ったら Y 上のものをさす．

6.7 節で述べた群スキームの完全列が定める長完全列を考えて，完全列

$$\begin{aligned}
&0 \to R/(F) &&\to H^1_{\mathrm{fl}}(Y, \alpha_p) &&\to H^1(Y, \mathcal{O}_Y)[F] \to 0,\\
&0 \to R/(F-1) &&\to H^1_{\mathrm{fl}}(Y, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}) &&\to H^1(Y, \mathcal{O}_Y)[F-1] \to 0,\\
&0 \to R^*/(F) &&\to H^1_{\mathrm{fl}}(Y, \mu_p) &&\to \operatorname{Pic}(Y)[p] \to 0
\end{aligned}$$

が得られる．また，Y' 上でも同様の完全列が得られる．これに関して，$H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ および $\operatorname{Pic}(Y) = 0$ が成り立ち，また $F - 1\colon R \to R$ は Hensel の補題より全射なので $R/(F-1) = 0$ が成り立つ．したがって $H^1_{\mathrm{fl}}(Y, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}) = 0$ である．

G が α_p または μ_p のとき，R や R^* の元の p 乗根が一般にとれないことから，自明でない G-torsor がたくさん存在する．（6.2 節の構成での「$b^p - \lambda b = c$ を満たす $b \in k$ をとる」，6.4 節の構成での「$b^p = c^{-1}$ を満たす $b \in k^*$ をとる」ができない．）剰余群 $\{\text{local } G\text{-torsor}\}/\{G\text{-torsor}\}$ は上のように局所コホモロジーや局所 Picard 群を用いて記述できるが，剰余群の同じ剰余類から同型でない local G-torsor が得られることになる．Y が 6.6 節の例に現れる特異点（RDP）の場合は，適切な剰余類（これらの場合，非自明な剰余類は $\operatorname{Aut}(G)$ 作用を除いて 1 つしか存在せず，その剰余類ならばよい）を選べば被覆 X は必ず滑らかになるが，一般には同じ剰余類から得た被覆の中に正規なものとそうでないものがあったり，相異なる無限種類の RDP が現れるものがあったり，なかなか扱いが難しい．

[LMM21b] では local torsor を用いて正標数（とくに標数 $2, 3, 5$）の RDP が商特異点になるかどうかを調べている．

参考文献

[Art75] M. Artin, *Wildly ramified $Z/2$ actions in dimension two*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 60–64. ↑9

[Art77] ———, *Coverings of the rational double points in characteristic p*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 11–22. ↑9

[BM76] E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p. III*, Invent. Math. **35** (1976), 197–232. ↑11, 28, 29

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990. ↑34

[Ful84] William Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984. ↑15

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977. 高橋宣能, 松下大介（訳）, 代数幾何学 1–3, 2012–2013, 丸善出版. ↑21

[Iit82] Shigeru Iitaka, *Algebraic geometry*, North-Holland Mathematical Library, vol. 24, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. An introduction to birational geometry of algebraic varieties. ↑17

[KT89] Toshiyuki Katsura and Y. Takeda, *Quotients of abelian and hyperelliptic surfaces by rational vector fields*, J. Algebra **124** (1989), no. 2, 472–492. ↑15

[KN82] Tetsuzo Kimura and Hiroshi Niitsuma, *On Kunz's conjecture*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), no. 2, 371–378. ↑8

[LN80] William E. Lang and Niels O. Nygaard, *A short proof of the Rudakov-Šafarevič theorem*, Math. Ann. **251** (1980), no. 2, 171–173. ↑26

[LMM21a] Christian Liedtke, Gebhard Martin, and Yuya Matsumoto, *Linearly reductive quotient singularities* (2021), available at `https://arxiv.org/abs/2102.01067v2`. ↑8

[LMM21b] ———, *Torsors over the rational double points in characteristic p* (2021), available at `https://arxiv.org/abs/2110.03650v1`. ↑35

[Mat22a] Yuya Matsumoto, *Canonical coverings of Enriques surfaces in characteristic* 2, J. Math. Soc. Japan **74** (2022), no. 3, 849–872. ↑29

[Mat22b] ———, *Purely inseparable coverings of rational double points in positive characteristic*, J. Singul. **24** (2022), 79–95. ↑4

[Mat23a] ———, *On μ_n-actions on K3 surfaces in positive characteristic*, Nagoya Math. J. **249** (2023), 11–49. ↑7, 13, 26

[Mat23b] ———, *μ_p- and α_p-actions on K3 surfaces in characteristic p*, J. Algebraic Geom. **32** (2023), 271–322. ↑9, 10, 11, 12, 13, 26, 28, 31, 32, 33

[Mat23c] ———, *Inseparable maps on W_n-valued Ext groups of non-taut rational double point singularities and the height of K3 surfaces*, J. Commut. Algebra **15** (2023), no. 3, 377–404. ↑28, 31

[Mat24] ———, *Inseparable Kummer surfaces* (2024), available at `https://arxiv.org/abs/2403.02770v1`. ↑33

[Mat63] Hideyuki Matsumura, *On algebraic groups of birational transformations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **34** (1963), 151–155. ↑17

[Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. ↑34

[MI21] Masayoshi Miyanishi and Hiroyuki Ito, *Algebraic surfaces in positive characteristics—purely inseparable phenomena in curves and surfaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2021. ↑9

[Mum70] David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970. ↑16, 20

[Nik79] V. V. Nikulin, *Finite automorphism groups of Kähler K3 surfaces*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **38** (1979), 75–137 (Russian). English translation: Trans. Moscow Math. Soc. **1980**, no. 2, 71–135. ↑13

[Nit05] Nitin Nitsure, *Construction of Hilbert and Quot schemes*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–137. ↑23

[Nyg79] Niels O. Nygaard, *A p-adic proof of the nonexistence of vector fields on K3 surfaces*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 515–528. ↑26

[Pes83] Barbara R. Peskin, *Quotient-singularities and wild p-cyclic actions*, J. Algebra **81** (1983), no. 1, 72–99. ↑9

[RS76] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), no. 6, 1269–1307, 1439 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **10** (1976), no. 6, 1205–1237. ↑7, 12, 15, 25, 26

[Sch21] Stefan Schröer, *Enriques surfaces with normal K3-like coverings*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), no. 2, 433–496. ↑34

[Ses60] Conjeerveram Srirangachari Seshadri, *L'opération de Cartier. Applications*, Séminaire C. Chevalley, 3ième année: 1958/59. Variétés de Picard, École Normale Supérieure, Paris, 1960, pp. 1–26 (French). ↑7

[SGA3-1] Philippe Gille and Patrick Polo (eds.), *Schémas en groupes (SGA 3). Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 7, Société Mathématique de France, Paris, 2011 (French). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1962–64]; A seminar directed by M. Demazure and A. Grothendieck with the collaboration of M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre; Revised and annotated edition of the 1970 French original. ↑24

[SP] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*. ↑11

[Tzi17] Nikolaos Tziolas, *Quotients of schemes by α_p or μ_p actions in characteristic $p > 0$*, Manuscripta Math. **152** (2017), no. 1–2, 247–279. ↑11

[Uen75] Kenji Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack. ↑17

[桂 22] 桂 利行, 楕円曲面, 岩波書店, 2022. ↑6, 15

[松村 80] 松村 英之, 可換環論, 共立出版, 1980. ↑4